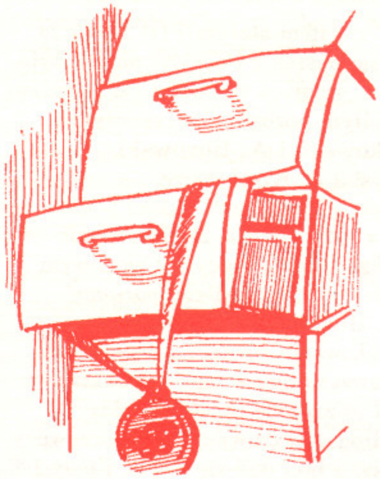
Kącik olimpijski (8)



Zasada szufladkowa Dirichleta (2)

Poprzedni kącik olimpijski był poświęcony zadaniom algebraicznym wykorzystującym zasadę szufladkową Dirichleta. Ten kącik zawiera zadania geometryczne, przy rozwiązywaniu których może być pomocna owa zasada.

1. Udowodnić, że w dowolnym $2n$-kącie wypukłym istnieje przekątna nierównoległa do żadnego z boków tego wielokąta.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że każda spośród $\frac{1}{2}(2n)(2n-3) = n(2n-3)$ przekątnych danego $2n$-kąta jest równoległa do pewnego z jego boków. Ponieważ

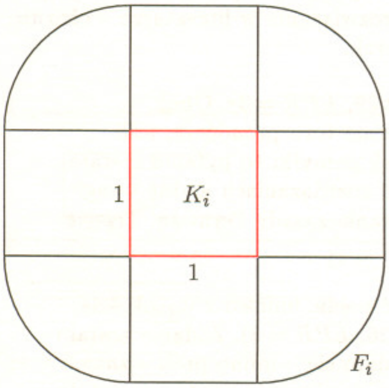
$$\frac{n(2n-3)}{2n} = n - \frac{3}{2} > n-2\,,$$

więc na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieje bok, do którego jest równoległych co najmniej $n-1$ przekątnych. Stąd wynika, że dany wielokąt ma co najmniej $2n+1$ wierzchołków (dlaczego?). Uzyskana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

2. Pięciokąt wypukły ma wierzchołki w punktach kratowych. Wykazać, że zawiera on w swoim wnętrzu co najmniej jeden punkt kratowy.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że dany pięciokąt nie zawiera w swoim wnętrzu punktów kratowych. Oznaczmy przez S zbiór wszystkich pięciokątów wypukłych o wierzchołkach w punktach kratowych leżących na obwodzie danego pięciokąta. Zbiór S jest niepusty i skończony, a więc w zbiorze tym istnieje pięciokąt o najmniejszym polu. Oznaczmy go przez P, a jego wierzchołki przez $P_1, \ldots, P_5$. Każdy z punktów P_i ma współrzędne jednego z czterech typów: (p,p), (p,n), (n,p), (n,n), gdzie p i n oznaczają odpowiednio liczby: parzystą i nieparzystą. Wierzchołków pięciokąta jest pięć, skąd, na mocy zasady szufladkowej, istnieją dwa różne punkty P_k, P_l tego samego typu. Dowodzi to, że środek M odcinka P_kP_l jest punktem kratowym. Obwód pięciokąta P nie zawiera jednak punktów (nie licząc wierzchołków) o współrzędnych całkowitych (dlaczego?). Punkt M należy więc do wnętrza P, wbrew uczynionemu wcześniej założeniu.

3. W kwadracie K o boku 130 znajduje się 1995 kwadracików o boku 1. Udowodnić, że w kwadracie K można umieścić koło o promieniu 1 rozłączne z owymi kwadracikami.



Rozwiązanie. Oznaczmy małe kwadraciki przez $K_1, K_2, \ldots, K_{1995}$. Niech F_i $(i = 1, 2, \ldots, 1995)$ będzie figurą złożoną z punktów odległych od kwadratu K_i o nie więcej niż 1 (rys.). Środek koła o promieniu 1, który ma być rozłączny z kwadracikami K_i, musi być odległy od brzegu kwadratu K o więcej niż 1, czyli musi należeć do wnętrza kwadratu o boku 128. Jeśli przez $|X|$ oznaczymy pole figury X, to

$$\sum_{i=1}^{1995} |F_i| = 1995 \cdot (\pi + 5) < 128^2\,.$$

Stąd istnieje w K punkt O nie należący do żadnej z figur F_i i odległy od brzegu kwadratu K o więcej niż 1. Zatem koło o środku O i promieniu 1 jest zawarte w kwadracie K i nie ma punktów wspólnych z żadnym z kwadracików K_i.

Następne zadania pozostawiamy Czytelnikom do samodzielnego rozwiązania.

4. W kwadracie o boku długości 1 danych jest 101 punktów. Wykazać, że pewne trzy spośród tych punktów tworzą trójkąt o polu nie większym niż 1/100.

5. Każdy punkt kratowy na płaszczyźnie pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje prostokąt o bokach równoległych do osi układu współrzędnych i wierzchołkach w punktach kratowych jednakowego koloru.

6. W kwadracie o boku długości 1 danych jest 51 punktów. Wykazać, że pewne trzy spośród tych punktów można przykryć kołem o promieniu 1/7.

7. W prostokącie o wymiarach 3×4 danych jest 6 punktów. Wykazać, że wśród nich istnieją takie dwa, których odległość jest nie większa niż $\sqrt{5}$.

8. Dowieść, że w dowolnym sześciokącie wypukłym pewna przekątna odcina trójkąt o polu nie większym niż 1/6 pola sześciokąta.

Krzysztof CHEŁMIŃSKI
Waldemar POMPE