Twierdzenie Ptolemeusza, twierdzenie Carnota i ciekawostka

Henryk PAWŁOWSKI

Twierdzenie Ptolemeusza znamy dobrze. Na łamach *Delty* pojawiało się kilka razy, choć nie przypominam sobie, aby kiedykolwiek towarzyszył mu dowód elementarny, odwołujący się jedynie do wiedzy ucznia szkoły podstawowej.

Warto zatem raz jeszcze wrócić do tego twierdzenia, zwłaszcza że przyda się nam w dalszej części artykułu. A brzmi ono następująco.

W każdym czworokącie wypukłym $ABCD$ iloczyn długości przekątnych nie przekracza sumy iloczynów długości przeciwległych boków,

(1) $$AC \cdot BD \leq AB \cdot DC + BC \cdot AD\,,$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg.

Oto elementarny dowód. Obierzmy wewnątrz czworokąta (rys. 1) punkt P tak, by $\angle PAD = \angle CBD$ oraz $\angle ADP = \angle BDC$. Wówczas z podobieństwa trójkątów APD i DBC otrzymujemy równości

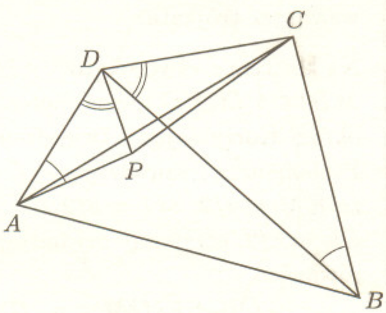
$$\frac{AP}{BC} = \frac{AD}{DB} \quad \text{oraz} \quad \frac{AD}{DP} = \frac{DB}{DC}\,,$$

które są równoważne, odpowiednio, równościom

(2) $$AP = \frac{BC \cdot AD}{DB}$$

oraz

(3) $$\frac{AD}{DB} = \frac{DP}{DC}\,.$$



Rys. 1

Z równości kątów ADB i PDC oraz proporcji (3) wynika, że trójkąty ABD i PCD są podobne. Stąd

(4) $$PC = \frac{AB \cdot DC}{DB}\,.$$

A ponieważ $AC \leq AP + PC$, więc uwzględniając (2) i (4) otrzymujemy nierówność Ptolemeusza (1). Zauważmy teraz, że równość w nierówności Ptolemeusza ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = AP + PC$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P należy do przekątnej AC. To zaś jest warunek konieczny i wystarczający równości kątów CAD i CBD, czyli warunek konieczny i wystarczający na to, aby czworokąt $ABCD$ można było wpisać w okrąg.

Tak więc czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD\,.$$

Z twierdzenia Ptolemeusza skorzystamy przy dowodzeniu twierdzenia Carnota.

Krótka opowieść o cieczach ferromagnetycznych

Stanisław BEDNAREK

Zapewne wszyscy pamiętamy, że magnes silnie przyciąga przedmioty sporządzone z niektórych substancji, np. ze stali, żelaza czy niklu. Substancje te nazywamy ferromagnetykami. Są to ciała stałe. Czy ciecz może być również ferromagnetykiem? Najprostszym sposobem otrzymania takiej cieczy wydawać by się mogło stopienie któregoś z wymienionych ciał stałych o właściwościach ferromagnetycznych. Okazuje się jednak, że silne ogrzanie tych ciał powyżej tzw. temperatury Curie powoduje utratę ich właściwości ferromagnetycznych. Następuje to jeszcze dużo wcześniej, zanim ciało stałe osiągnie temperaturę topnienia i zacznie zmieniać się w ciecz. Dla żelaza np. temperatura topnienia wynosi 1535°C, a temperatura Curie jest znacznie niższa i równa się „tylko" 769°C.

O istnieniu temperatury Curie można się dość łatwo przekonać w warunkach domowych. Weźmy niewielki magnes stały i cienką blaszkę stalową. Bardzo dobrze nadaje się do tego celu żyletka. Zbliżamy magnes do zimnej żyletki. Zauważamy, że jest ona silnie przyciągana. Ujmijmy teraz żyletkę kombinerkami i ogrzejmy ją do czerwoności w płomieniu kuchenki gazowej lub w zwykłej kuchni węglowej. Gorącą żyletkę szybko zbliżamy do magnesu. Okazuje się, że teraz przyciąganie jest bardzo słabe albo nie występuje wcale.

Wyjaśnienie zaobserwowanych efektów w bardzo ogólnym zarysie jest następujące. Atomy niektórych substancji zachowują się jak maleńkie, bardzo słabe magnesiki. Ich orientacja w przestrzeni jest jednak zupełnie przypadkowa i ciało jako całość nie wykazuje właściwości magnetycznych. W ferromagnetykach następuje samoistne uporządkowanie tych atomowych magnesików w niewielkich obszarach o rozmiarach kilku tysięcznych milimetra. Obszary te są nazywane domenami. Jednak i tutaj kierunki uporządkowania dla różnych domen są na ogół zupełnie przypadkowe.

Umieszczenie ferromagnetyka w zewnętrznym polu magnetycznym powoduje, że pole to stara się uczynić kierunek uporządkowania dla wszystkich domen zgodny z kierunkiem linii pola. Ferromagnetyk wciągany jest w obszar silniejszego pola, co obserwujemy jako przyciąganie do biegunów magnesu. Niektóre ferromagnetyki (tzw. magnetycznie twarde) stają się nawet przy tym magnesami trwałymi. Wysoka temperatura powoduje wzrost szybkości chaotycznych ruchów cieplnych atomów lub cząsteczek i niszczenie samoistnego uporządkowania w domenach, niezbędnego dla wystąpienia właściwości ferromagnetycznych.

Żeby uzyskać ciecz ferromagnetyczną, musiano więc wybrać inną drogę niż topnienie stałych ferromagnetyków. Wykorzystano ciecze, które w normalnych warunkach występują w przyrodzie, ale nie mają właściwości ferromagnetycznych. Takimi cieczami są np. nafta, woda czy oleje. Dalej będziemy je nazywać cieczami dyspersyjnymi. Substancję ferromagnetyczną rozdrobniono na bardzo małe cząstki o rozmiarach od 2 do 100 nm (1 nm – nanometr – to jedna milionowa część milimetra). Cząstki te zmieszano z cieczą dyspersyjną otrzymując ich zawiesinę o równomiernym rozproszeniu wewnątrz całej objętości cieczy.

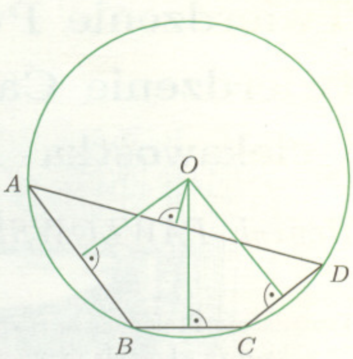
Wydawać by się mogło, że zawiesina taka będzie bardzo niestabilna, ponieważ gęstość znanych ferromagnetyków jest kilkakrotnie większa od gęstości cieczy dyspersyjnych. Na przykład, gęstość żelaza wynosi 7,8 g/cm^3, niklu 8,6 g/cm^3, a gęstość wody jest równa 1 g/cm^3, nafty zaś 0,8 g/cm^3. Rozproszone cząstki powinny więc szybko opaść na dno naczynia, podobnie jak opada kamień tonący w wodzie. Okazuje się jednak, że cząstki o bardzo małych rozmiarach mogą przez praktycznie dowolnie długi czas uchronić się przed opadaniem, a nawet wędrować w górę wewnątrz cieczy lub gazu.

Przyczyną tego są ruchy Browna. Zasada ich powstawania jest następująca. Cząsteczki cieczy otaczające cząstkę nieustannie w nią uderzają. Prędkości tych cząsteczek podlegają przypadkowym wahaniom, czyli tzw. fluktuacjom. Od czasu do czasu zdarza się więc silniejsze uderzenie w cząstkę od dołu podrzucające ją do góry. Potem cząstka znów trochę opada, aż trafi na kolejny podrzut. Te skokowe ruchy cząstek można obserwować pod mikroskopem. Są to właśnie ruchy Browna. Odkrył je angielski botanik Robert Brown, a ich ilościowe wyjaśnienie podał Albert Einstein i niezależnie od niego polski fizyk Marian Smoluchowski.

Utrzymującą się w ten sposób stabilną zawiesinę bardzo rozdrobnionej substancji stałej w cieczy nazywa się roztworem koloidalnym lub krótko – koloidem.

Gdy ciecz ferromagnetyczna nie jest umieszczona w zewnętrznym polu magnetycznym, wówczas zachowuje się podobnie jak zwykłe ciecze. A więc można ją, na przykład, łatwo przelewać. Przyjmuje przy tym kształt naczynia, do którego zostanie wlana. Jeżeli wlejemy ją do naczyń połączonych, to wysokości słupków cieczy we wszystkich ramionach

Zanim je sformułujemy, potrzebna będzie krótka definicja. Niechaj dany będzie wielokąt wypukły wpisany w okrąg o środku O. Każdemu bokowi AB wielokąta przyporządkowujemy liczbę $f(AB)$ równą odległości środka O od boku AB z minusem, gdy najkrótsza droga z O do AB leży *w całości* na zewnątrz wielokąta (rys. 2) i z plusem w przeciwnym przypadku.



Rys. 2. Dla tego wielokąta $ABCD$ mamy $f(AD) < 0$, a $f(AB)$, $f(BC)$ i $f(CD)$ są dodatnie.

Definicja funkcji f zależy, oczywiście, od całego wielokąta, a nie od jego poszczególnych boków. Nie uwzględnimy tego w naszej notacji, by nie komplikować zbytnio oznaczeń.

Twierdzenie Carnota. *W dowolnym trójkącie ABC suma*

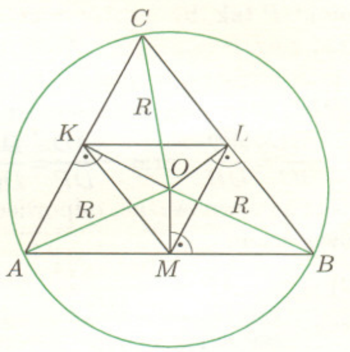
$$f(AB) + f(BC) + f(CA)$$

równa jest sumie promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC i promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Dowód. Wprowadźmy oznaczenia takie, jak na rysunku 3. Rozważmy najpierw przypadek, gdy trójkąt ABC jest ostrokątny. Wówczas, jak wiemy, punkt O leży wewnątrz trójkąta.

Na każdym z czworokątów $AMOK$, $MBLO$ i $LCKO$ można opisać okrąg. Korzystając z twierdzenia Ptolemeusza i zauważając, że $KM = a/2$, $ML = b/2$, $LK = c/2$, otrzymujemy następujące równości:

$$c \cdot OK + b \cdot OM = a \cdot R,$$
$$c \cdot OL + a \cdot OM = b \cdot R,$$
$$a \cdot OK + b \cdot OL = c \cdot R.$$



Rys. 3. Punkty M, L, K są środkami boków AB, BC i CA. Punkt O to środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Ponadto, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

Dodanie ich stronami prowadzi do

$$a(OK + OM) + b(OM + OL) + c(OL + OK) = (a + b + c)R.$$

Jednocześnie, obliczając na dwa różne sposoby pole trójkąta ABC przekonujemy się, że

$$a \cdot OL + b \cdot OK + c \cdot OM = (a + b + c)r$$

(r oznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC). Po dodaniu obu ostatnich równości i podzieleniu stron przez obwód trójkąta ABC otrzymamy tezę.

Gdy trójkąt ABC jest prostokątny, to *naprawdę* nie ma czego dowodzić.

Rozważmy wreszcie przypadek trójkąta ABC rozwartokątnego (rys. 4). Wówczas punkt O znajdzie się na zewnątrz trójkąta ABC. Stosując – tak jak poprzednio – twierdzenie Ptolemeusza dostaniemy równości

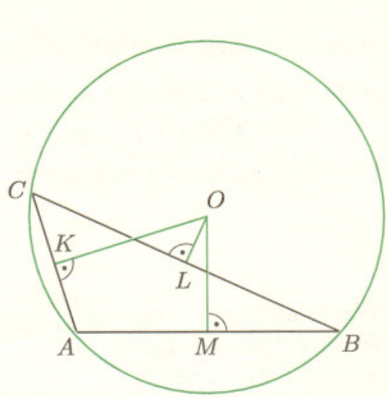
$$c \cdot OK + b \cdot OM = a \cdot R,$$
$$-c \cdot OL + a \cdot OM = b \cdot R,$$
$$a \cdot OK - b \cdot OL = c \cdot R,$$

z których wynika, że

$$(a+b+c)R = (a+b)OM + (a+c)OK - (b+c)OL.$$

Również

$$(a+b+c)r = c \cdot OM + b \cdot OK - a \cdot OL.$$



Rys. 4

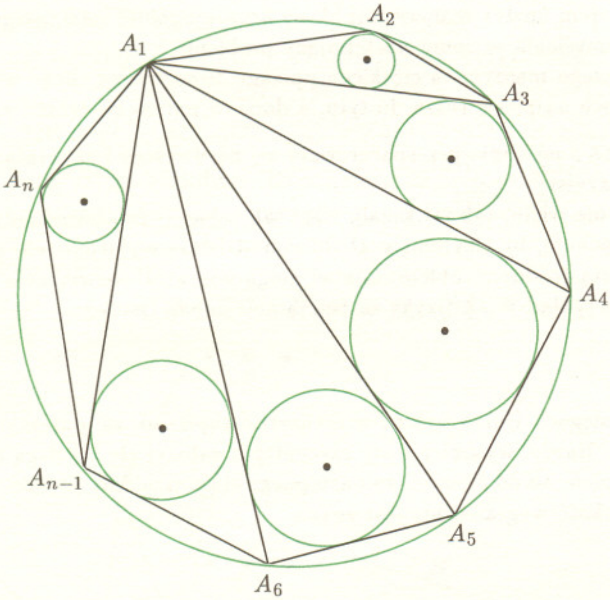
Dodając dwie ostatnie równości i dzieląc obie strony otrzymanego równania przez $(a+b+c)$ otrzymamy

$$R + r = OM + OK - OL = f(AB) + f(CA) + f(BC),$$

czyli tezę twierdzenia Carnota.

Pora na ciekawostkę. Rozważmy wielokąt wypukły $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geq 4$, wpisany w okrąg o środku O i promieniu R. Prowadząc z dowolnego wierzchołka tego wielokąta przekątne rozbijemy go na trójkąty. Wpiszmy w każdy z nich okrąg (rys. 5). Okazuje się, że

Suma promieni tych wszystkich okręgów jest stała, tzn. nie zależy od wyboru wierzchołka, z którego prowadzimy przekątne.



Rys. 5

Twierdzenie to liczy sobie około 200 lat (odkrył je na początku XIX wieku nieznany japoński matematyk). Jest tak piękne i proste, że z pewnością nie zasługuje na to, by tkwić w zapomnieniu. A oto jego dowód.

Ponumerujmy trójkąty, na które rozbiły wielokąt jego przekątne wychodzące z ustalonego wierzchołka. Niech r_i będzie promieniem okręgu wpisanego w i-ty trójkąt. Przez a_i, b_i oraz c_i oznaczmy boki i-tego trójkąta. Wtedy, na mocy twierdzenia Carnota,

$$r_i + R = f(a_i) + f(b_i) + f(c_i) \qquad \text{dla } i = 1, 2\ldots, n-2.$$

Stąd wynika, że interesująca nas suma jest równa

$$\sum_{i=1}^{n-2} r_i = \sum_{i=1}^{n-2} \left(f(a_i) + f(b_i) + f(c_i)\right) - (n-2)R.$$

tych naczyń będą jednakowe. Ciecz ferromagnetyczną nie poddaną działaniu zewnętrznego pola magnetycznego bez trudu można zamieszać, tak jak miesza się herbatę w szklance łyżeczką. Jeżeli wewnątrz cieczy umieścimy jakieś poruszające się ciało, na przykład obracający się krążek lub mieszadełko, to ruch tych przedmiotów będzie hamowany niewiele więcej niż w zwykłych cieczach.

Właściwości i zachowanie się cieczy ferromagnetycznych ulegają jednak radykalnym zmianom pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego. Gdy ciecz zostanie umieszczona w niejednorodnym polu magnetycznym, tzn. takim, które w pewnym obszarze jest silniejsze, wówczas zostanie ona wciągnięta w ten obszar. Jeżeli do jednego z ramion naczyń połączonych, zawierających ciecz ferromagnetyczną, zostanie zbliżony magnes, wtedy poziom cieczy w tym ramieniu podniesie się lub obniży w zależności od położenia magnesu.

Gdy z kolei magnes zostanie umieszczony w pobliżu płynącego strumienia cieczy ferromagnetycznej, strumień ten odchyli się w stronę magnesu. W silnym polu magnetycznym obserwuje się zjawisko nazywane zestalaniem cieczy ferromagnetycznej. Polega ono na tym, że lepkość tej cieczy silnie wzrasta. Poruszające się w niej ciało, na przykład obracająca się tarcza czy mieszadełko, są bardzo intensywnie hamowane. Ciecz nabiera pewnych właściwości ciała sztywnego i sprężystego. Próba usunięcia jej z określonego obszaru objętego polem magnetycznym powoduje, że ciecz ferromagnetyczna uparcie wraca w to miejsce.

Przyczyną opisanych zjawisk zachodzących w cieczach ferromagnetycznych jest oddziaływanie rozproszonych w nich cząstek z polem magnetycznym. Właściwości ferromagnetyczne tych cząstek powodują, że ustawiają się one wzdłuż linii pola magnetycznego, podobnie jak dzieje się to w znanym ze szkoły doświadczeniu z opiłkami żelaznymi rozsypanymi na kartce papieru pokrywającej magnes. Przemieszczające się względem cieczy dyspersyjnej cząstki ferromagnetyka dzięki siłom lepkości wprawiają w ruch również otaczające je cząsteczki tej cieczy. W rezultacie tego pole magnetyczne działając na rozproszone cząstki wpływa na zachowanie się cieczy ferromagnetycznej jako całości, którą fizycy traktują tutaj jako tzw. ośrodek ciągły.

W silnym jednorodnym polu magnetycznym rozproszone cząstki ustawiają się wzdłuż jego linii tworząc charakterystyczne równoległe włókna, które w krótkim czasie grupują się w wiązki przypominające grubsze kolumny. Występowanie tych zjawisk zostało bezpośrednio potwierdzone w efektownych doświadczeniach z oddziaływaniem światła laserowego na cząstkach zestalonej cieczy ferromagnetycznej. Otrzymano wówczas obrazy interferencyjne charakterystyczne dla wspomnianego ustawienia cząstek wzdłuż włókien i kolumn. Uwięzione przez pole magnetyczne cząstki dzięki siłom lepkości skutecznie przeciwdziałają próbom przemieszczenia cieczy dyspersyjnej.

Niezwykłe właściwości cieczy ferromagnetycznych zdecydowały o ich różnorodnych zastosowaniach. Niewielkie ilości tych cieczy uwięzione w pułapkach utworzonych przez odpowiednio ukształtowane pole magnetyczne spełniają rolę łożysk i uszczelek, które nie zużywają się i nie wymagają smarowania ani regulacji. Ciecz ferromagnetyczna umieszczona w zmiennym polu magnetycznym spełnia rolę elementu roboczego w przetwornikach elektromechanicznych lub generatorach ultradźwięków. Ta sama ciecz wprowadzona w szczelinę, w której drga cewka zwykłego głośnika elektrodynamicznego zwiększa strumień magnetyczny przechodzący przez cewkę, ułatwia chłodzenie i tłumi szkodliwe drgania. Dzięki temu zwiększa się moc i poprawia jakość wytwarzanego dźwięku.

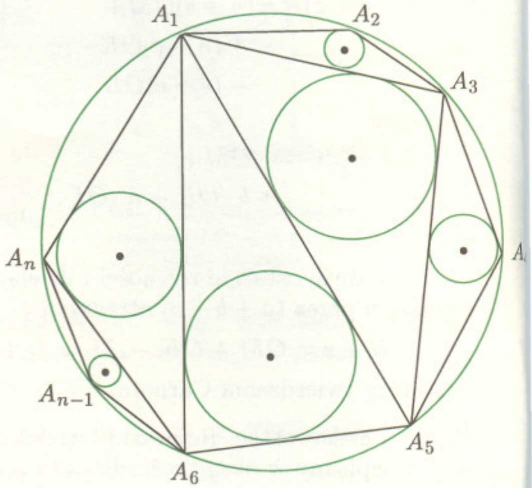
Budowane są również sprzęgła, hamulce i tłumiki drgań zawierające ciecze ferromagnetyczne. W urządzeniach tych wykorzystuje się opisane wcześniej zjawisko zestalania się tych cieczy pod wpływem pola magnetycznego. W sprzęgłach zestalona ciecz ferromagnetyczna powoduje złączenie obracającej się tarczy z napędzanym zespołem, a w hamulcach i tłumikach spowalnia ruchy specjalnie ukształtowanych elementów. Właściwości ferromagnetyczne omawianych cieczy, podobnie jak stałych ferromagnetyków, słabną wraz ze wzrostem temperatury aż do całkowitego ich zaniku w temperaturze Curie. Zależność ta pozwala na wykorzystanie cieczy ferromagnetycznych do pomiaru temperatury. Nie jest to zresztą jedyny przykład ich zastosowania w technice pomiarowej. Ciecze ferromagnetyczne używane są m.in. do ciągłego pomiaru

Wystarczy więc zauważyć, że suma $\sum_{i=1}^{n-2}(f(a_i)+f(b_i)+f(c_i))$ jest stała, gdyż z definicji f wynika, że jest ona równa

$$f(A_1A_2)+f(A_2A_3)+\dots+f(A_{n-1}A_n)+f(A_nA_1)\,.$$

Czytelnik zechce się zastanowić, dlaczego tak jest.

Warto na koniec zauważyć, że nasz dowód pokazuje w istocie nieco więcej. Mianowicie, jeśli wielokąt wypukły $A_1A_2\dots A_n$, wpisany w okrąg, podzielimy na $(n-2)$ trójkątów przekątnymi niekoniecznie wychodzącymi z jednego wierzchołka (rys. 6), to suma długości promieni okręgów wpisanych w te trójkąty też nie będzie zależeć od sposobu podziału.



Rys. 6

Zadałem kiedyś w pierwszej klasie liceum ogólnokształcącego do przemyślenia w domu następujący problem:
Dlaczego maszynista ciężkiego pociągu towarowego chcąc wprawić go w ruch najpierw rusza do tyłu, a dopiero potem we właściwym kierunku?

Jedna z uczennic przespacerowała się na dworzec i zapytała o to maszynistę.
„Ja nie wiem, tak mi kazali, więc tak robię" – odpowiedział fachowiec. Proponuję, by Czytelnicy *Delty* samodzielnie wyjaśnili ten, niezbyt zresztą trudny, problem. Leniwi mogą poszukać rozwiązania w książkach, na przykład w „Z fizyką za pan brat" Hansa Backego.

* * *

W księgach Uniwersytetu w Oxfordzie zapisano, że matematyk G.H. Hardy, wysokiej klasy ekscentryk, założył się z kolegą o pół pensa co dzień, aż do śmierci, że następnego dnia wzejdzie Słońce. Sumaryczna wysokość wygranej nie jest znana.

* * *

Kielecka firma SARAD wytwarza produkt o niezwykle oryginalnej nazwie: jest to „Ryż paraboliczny Galant". Na czym polega paraboliczność ziaren ryżu, zostało wyjaśnione na opakowaniu: „Ryż Galant ... zachowuje swe witaminy i sole mineralne dzięki procesowi paraboiled...". Proces ten polega na zanurzeniu we wrzątku, a następnie poddaniu działaniu pary wodnej pod ciśnieniem. Okazuje się więc, że sensu w tym nie ma za grosz (oczywiście, w nazwie, bo procedura przygotowania ryżu jest całkiem sensowna). Angielski czasownik „to paraboil" oznacza sparzyć, podgotować i nie ma nic wspólnego z parabolą. Paraboliczny po angielsku to parabolic. Być może to matematyczno-gastronomiczne qui pro quo jest najlepszym argumentem za tym, by każdy, także i kucharz znał elementarną matematykę na poziomie wyższym niż tabliczka mnożenia, a poza tym, by znał język angielski.

K.R.