Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

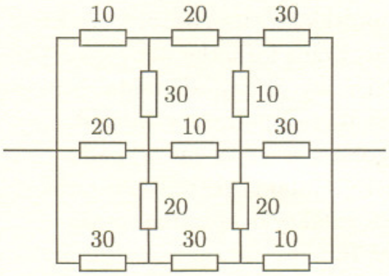
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin drukujemy w numerze lutowym każdego roku.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1995

Zadania z fizyki nr 191, 192

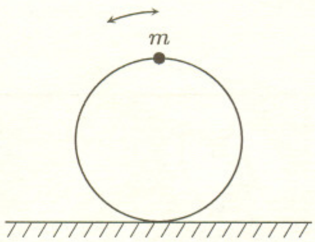
Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

191. Obliczyć przybliżoną wartość oporu zastępczego obwodu przedstawionego na rysunku 1 (liczby oznaczają oporności w omach). Należy podać ocenę dokładności przybliżenia i uzasadnić ją. Rozwiązanie powinno być możliwie dokładne, a jednocześnie jak najmniej pracochłonne. Użycie komputera do obliczeń jest wykluczone.

192. Małe ciało o masie m przymocowano do cienkiej obręczy o masie M i promieniu r. Obręcz postawiono pionowo (rys. 2) i bardzo lekko pchnięto w lewo lub w prawo. Jeśli podczas ruchu obręczy nie występuje poślizg ani straty energii, to jaka musi być wartość stosunku M/m, aby obręcz „podskoczyła”, tzn. oderwała się od podłoża?



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1994

Przypominamy treść zadań:

183. Dr Crimeon Falsegrant, skazany za defraudację neutrin słonecznych na 10^{100} lat więzienia, kręcił się w kółko po celi.
– Jakoś muszę się stąd wydostać! – powtarzał. – Z pewnością istnieje możliwość! Na początek zastosować przekształcenie konforemne w 11-wymiarowej przestrzeni spinorowej... albo lepiej nie, można nie powrócić już na oś rzeczywistą... A gdyby tak spróbować przejścia tunelowego? Ta ściana nie wygląda na bardzo grubą, chyba nie więcej niż metr... Trzeba tak rozepchnąć cząsteczki ściany, aby przeszły między nimi cząsteczki mojego ciała, powinno wystarczyć jakieś 20 eV na atom. To jest szansa!
Ocenić orientacyjnie szansę dr. Falsegranta.
Wskazówka: W mechanice kwantowej prawdopodobieństwo przejścia tunelowego cząstki o masie m przez barierę potencjału o szerokości d wyraża się wzorem

$$p \approx e^{-2\kappa d},$$

gdzie $\kappa = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\hbar = h/2\pi$, h – stała Plancka, E – deficyt energii.

184. Większą ilość rtęci nalano na płaską poziomą powierzchnię nie „zwilżaną” przez rtęć (np. szklaną). Obliczyć grubość warstwy rtęci.
Dane: gęstość rtęci $\varrho = 13{,}6$ g/cm^3, napięcie powierzchniowe $\sigma = 0{,}54$ N/m.

183. Przyjmijmy, że masa więźnia wynosi 75 kg, a średnia masa atomowa jego ciała jest równa 10 (oczywiście, w skład ciała wchodzi lekki wodór, ale także i cięższe pierwiastki). Przy tych założeniach więzień składa się z 7500 moli $= 7500 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 4{,}5 \cdot 10^{27}$ atomów, a całkowity deficyt energii jest równy $E = 9 \cdot 10^{28}$ eV $\approx 1{,}4 \cdot 10^{10}$ J. Parametr $\kappa = \sqrt{2mE}/\hbar$ ma zatem wartość $1{,}4 \cdot 10^{40}$ m^{-1}, a prawdopodobieństwo przejścia $p \approx \exp(-2\kappa d) \approx \exp(-2{,}8 \cdot 10^{40}) \approx 10^{-1{,}2 \cdot 10^{40}}$. Jest to wielkość tak niewyobrażalnie mała, że właściwie nie ma żadnej różnicy, czy więzień dokona jednej tylko próby przejścia tunelowego, czy będzie je powtarzał milion razy na sekundę przez 10^{100} lat.

184. Oznaczmy masę nalanej rtęci przez m, a szukaną grubość warstwy przez d. Pomijając „zaokrąglenie” przy brzegach możemy wyrazić powierzchnię warstwy S wzorem

$$S = \frac{m}{\varrho d}.$$

Energia grawitacyjna rtęci dana jest wyrażeniem $E_{\text{graw}} = \frac{1}{2}mgd$ (gdyż średnia wysokość wynosi $\frac{1}{2}d$), a energia powierzchniowa – wyrażeniem $E_{\text{pow}} = 2S\sigma$ (uwzględniamy górną i dolną powierzchnię rtęci, a pomijamy brzegi). Minimalną energię całkowitą otrzymamy dla

$$d = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho g}} \approx 4{,}0 \text{ mm}.$$

Zadania z matematyki nr 293, 294

Redaguje Marcin E. KUCZMA

293. Ciąg wielomianów $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$ jest określony wzorami

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,$$
$$nP_{n+1}(x) = (n+1)xP_n(x) - P_{n-1}(x) \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Dowieść, że wszystkie pierwiastki rzeczywiste każdego z wielomianów $P_n(x)$ są liczbami z przedziału $(-1; 1)$.

294. Udowodnić, że wewnątrz dowolnego czworokąta wypukłego $ABCD$ istnieje punkt, którego rzuty na proste AB, BC, CD, DA leżą na jednym okręgu.

Zadanie **294** zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1994

Przypominamy treść zadań:

285. W przestrzeni danych jest 10 punktów (w położeniu ogólnym). Łączymy pewne pary punktów odcinkami tak, aby każde dwa spośród rozważanych punktów łączyła dokładnie jedna linia łamana utworzona z narysowanych odcinków. Ile jest różnych układów odcinków spełniających ten warunek?

286. Dla każdej rzeczywistej wartości parametru t wyznaczyć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniające układ równań

$$\begin{cases} (x^2 - yz)(x+t) + (y^2 - zx)(y+t) + (z^2 - xy)(z+t) = 0 \\ (t+2)(x+y+z) = 1. \end{cases}$$

285. Oznaczmy przez $f(n)$ liczbę grafów o podanej w zadaniu własności („drzew spójnych"), których zbiorem wierzchołków jest ustalony zbiór n punktów; przyjmujemy $f(1) = 1$. Wybierzmy i ustalmy dwa różne punkty A i B z tego zbioru.

Niech będzie dany graf, o jakim mowa. Na jedynej drodze wiodącej z A do B oznaczmy przez X ostatni napotkany wierzchołek przed B (może się zdarzyć, że $X = A$). Pomalujmy krawędź XB na żółto. Wszystkie wierzchołki osiągalne z punktu A drogami nie przechodzącymi przez B, a także wszystkie krawędzie na tych drogach, malujemy na czerwono. Pozostałe wierzchołki i krawędzie malujemy na zielono; w szczególności punkty A i X otrzymują kolor czerwony, a punkt B – zielony. Niech k będzie liczbą wierzchołków czerwonych $(1 \leq k \leq n-1)$.

Zauważmy, że dowolny dopuszczalny graf jest wyznaczony jednoznacznie przez:
- Wybór liczby $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
- Wybór zbioru $k-1$ punktów (spośród $n-2$ punktów różnych od A i B), które wraz z punktem A zostaną pomalowane na czerwono (a pozostałe punkty – na zielono).
- Wybór jednego z k czerwonych punktów – punktu X – i połączenie go żółtą krawędzią z B.
- Połączenie pewnych czerwonych punktów czerwonymi krawędziami tak, aby powstało czerwone spójne drzewo ($f(k)$ możliwości).
- Połączenie pewnych zielonych punktów zielonymi krawędziami tak, aby powstało zielone spójne drzewo ($f(n-k)$ możliwości).

Wynika stąd wzór rekurencyjny
$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} k f(k) f(n-k).$$

Znając wartość $f(1) = 1$ wyznaczamy: $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 16$, $f(5) = 125$, $f(6) = 1296$, $f(7) = 16807$, $f(8) = 262144$, $f(9) = 4782969$, i wreszcie $f(10) = 100000000$ (sto milionów – jest to szukana liczba).

[**Uwaga.** Widzimy, że $f(n) = n^{n-2}$ dla $n \leq 10$. Ta równość zachodzi dla wszystkich n. Można ją uzyskać stosując zaawansowane metody teorii grafów lub też dowodząc, że funkcja $f(n) = n^{n-2}$ spełnia znaleziony powyżej wzór rekurencyjny; patrz: J. Riordan, *Combinational Identities*, New York 1968, rozdział 1.5, wzór (13a), z podstawieniem $x{=}y{=}1$.]

286. Skorzystamy z tożsamości

$$(1) \qquad x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) + 3xyz.$$

Dowód: oznaczając sumę $x + y + z$ przez s mamy
$$\begin{aligned} s^3 &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(y^2z + yz^2) + 3(z^2x + zx^2) + 3(x^2y + xy^2) + 6xyz = \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3yz(s-x) + 3zx(s-y) + 3xy(s-z) + 6xyz = \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3s(yz + zx + xy) - 3xyz, \end{aligned}$$
skąd
$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= s^3 - 3s(yz + zx + xy) + 3xyz = \\ &= s(s^2 - 3yz - 3zx - 3xy) + 3xyz = s(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) + 3xyz. \end{aligned}$$

Pierwsze równanie danego w zadaniu układu
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + t(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) = 0$$
możemy dzięki tożsamości (1) przepisać w postaci
$$(2) \qquad (x + y + z + t)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) = 0,$$
drugie zaś – w postaci
$$(3) \qquad x + y + z = \frac{1}{t+2}.$$

Drugi czynnik iloczynu (2) jest zerem, tylko gdy liczby x, y, z są równe; aby równanie (3) było spełnione, ta wspólna wartość musi być równa $1/(3t+6)$. Natomiast jeśli układ (2), (3) ma rozwiązanie (x, y, z), w którym nie wszystkie trzy liczby są równe, wówczas pierwszy czynnik iloczynu (2) musi być zerem, co w połączeniu z równaniem (3) daje równość $-t = 1/(t+2)$, słuszną tylko dla $t = -1$. Każda trójka liczb x, y, z o sumie równej 1 jest wtedy rozwiązaniem.

Reasumując:
- Jeżeli $t = -2$, to układ nie ma rozwiązań.
- Jeżeli $t = -1$, to rozwiązaniem jest każda trójka (x, y, z) taka, że $x + y + z = 1$.
- Jeżeli $t \neq -1$, $t \neq -2$, to układ ma jedyne rozwiązanie $x = y = z = 1/(3t+6)$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 279 (WT=1,93) i 280 (WT=2,20) z numeru 4/1994

Paweł Lizak	– Puławy	45,40
Waldemar Pompe	– Warszawa	42,44
Lesław Skrzypek	– Rzeszów	40,80
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	39,72

Pan Lizak: numer 76 w matematycznym Klubie **44**.