Jeszcze raz o nierówności Ptolemeusza

Podamy tu inny, równie elementarny i prosty dowód nierówności Ptolemeusza. Skorzystamy jedynie z definicji inwersji i pewnej jej własności. Tym, którzy nie słyszeli o inwersji (w geometrii), należy się kilka słów wyjaśnienia.

Rozpatrzmy na płaszczyźnie okrąg Γ o środku O i promieniu r. Każdemu punktowi A tej płaszczyzny, różnemu od O, przyporządkowujemy punkt A' leżący na półprostej OA i spełniający warunek $OA' \cdot OA = r^2$. Tak zdefiniowane przekształcenie nazywamy *inwersją względem okręgu* Γ. Punkt O nazywamy *środkiem inwersji.*

Inwersja ma szereg ciekawych własności, które pomagają w rozwiązaniu niektórych, czasami niełatwych zadań. Jedną z nich jest następujące twierdzenie:

Rozpatrzmy inwersję względem pewnego okręgu o środku O. Obrazem dowolnego okręgu przechodzącego przez O, względem tej inwersji, jest prosta nie przechodząca przez O. Ponadto, obrazem dowolnej prostej nie przechodzącej przez O jest okrąg przechodzący przez O.

Zachęcamy niewtajemniczonych Czytelników do udowodnienia tego faktu!

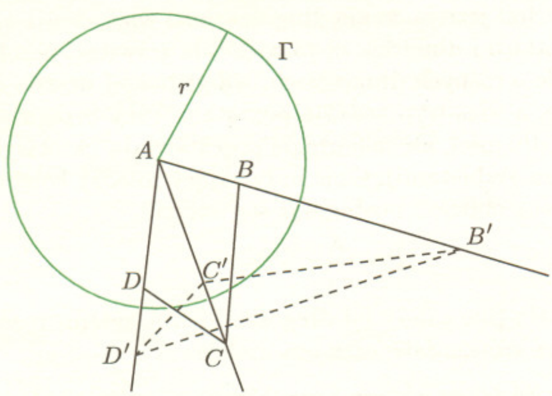
Przystępujemy do dowodu nierówności Ptolemeusza dla dowolnego czworokąta $ABCD$. Niech Γ będzie okręgiem o środku A i promieniu $r = \sqrt{AB \cdot AC \cdot AD}$. Oznaczmy odpowiednio przez B', C', D' obrazy punktów B, C, D przy inwersji względem okręgu Γ. Na mocy definicji inwersji $AC \cdot AC' = r^2 = AB \cdot AC \cdot AD$, skąd

(*) $$AC' = AB \cdot AD\,.$$

Ponieważ $AB \cdot AB' = r^2 = AC \cdot AC'$ oraz $\angle BAC = \angle C'AB'$, więc trójkąty ABC i $AC'B'$ są podobne. To oznacza, że $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{B'C'}{AC'}$. Uwzględniając równość (*) dostajemy $B'C' = AD \cdot BC$.

Analogicznie dowodzimy, że

$$C'D' = AB \cdot CD \quad \text{oraz} \quad B'D' = AC \cdot BD\,.$$



Na mocy nierówności trójkąta dla trójkąta $B'C'D'$ otrzymujemy

$$B'C' + C'D' \geq B'D'\,,$$

czyli

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq AC \cdot BD\,.$$

Kiedy zachodzi równość? Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkty B', C', D' leżą na jednej prostej, czyli na mocy cytowanej wyżej własności inwersji, wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.

Waldemar POMPE

grubości w procesach produkcyjnych, a także do pomiarów ciśnienia oraz bardzo dużych natężeń prądu elektrycznego. Istnieją również projekty budowy układów do bezpośredniego przetwarzania energii cieplnej na energię elektryczną. W układach tych czynnikiem roboczym będzie przewodząca ciecz ferromagnetyczna poruszająca się w polu magnetycznym pod wpływem różnicy ciśnień spowodowanej ogrzaniem jej powyżej punktu Curie. Prowadzone są także próby wykorzystania specjalnych cieczy ferromagnetycznych w medycynie do zwiększenia koncentracji niektórych leków w wybranych obszarach organizmu.

W warunkach domowych nie uda się, niestety, rozdrobnić substancji ferromagnetycznej do rozmiarów kilkudziesięciu nanometrów i uzyskać stabilnej cieczy ferromagnetycznej. Można natomiast otrzymać jej namiastkę mieszając drobne opiłki żelazne z dowolnym, możliwie gęstym olejem. Opiłki te powinny być czyste i nie magnesować się trwale. Najlepiej sporządzić je samemu spiłowując kilka miękkich gwoździ drobnym pilnikiem, tzw. gładzikiem. Stosunek objętości użytych opiłków i oleju powinien być około 4:1. Umieszczając otrzymaną mieszaninę w silnym polu magnetycznym, na przykład pierścieniowego magnesu ferrytowego pochodzącego z uszkodzonego głośnika, można wprawić ją w ruch lub uzyskać stan podobny do zestalenia cieczy ferromagnetycznej.