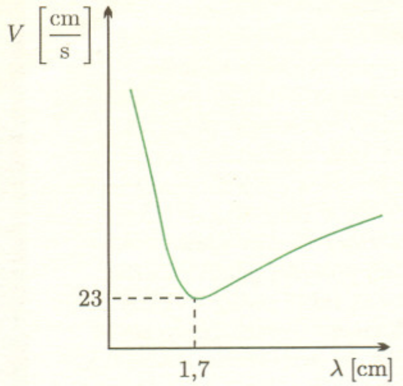

Prędkość fal na głębokiej wodzie w zależności od długości fali. Fale o długości $\lambda = 1{,}7$ cm możemy uważać za umowną granicę między falami krótkimi i długimi.

Rozwiązanie zadania M 726. Tak. Na przykład: $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$. Ogólnie, jeśli $\sqrt{p}$ jest niewymierny, to trójka $a=m^2p$, $b=k^2p$, $c=(k+m)^2p$ spełnia, dla dowolnych $k,m\in\mathbb{N}$ równość $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$.

Rozwiązanie zadania M 727. Odpowiedź jest negatywna. Rozważmy ciąg $a_n = n+\sqrt{2}$. Przypuśćmy, że można wybrać z niego trójwyrazowy podciąg geometryczny, a więc, że istnieją parami różne indeksy m,n,k takie, iż $a_na_m = a_k^2$. Wówczas

$$(n+\sqrt{2})(m+\sqrt{2}) = (k+\sqrt{2})^2,$$
$$(m+n-2k)\sqrt{2} = k^2 - mn.$$

Z niewymierności $\sqrt{2}$ wynika, że $m+n=2k$ i $mn=k^2$. Zatem

$$(m-n)^2 = (m+n)^2 - 4mn = 4k^2 - 4k^2 = 0,$$

czyli

$$m = n.$$

Wykazana sprzeczność dowodzi, że z ciągu $\{a_n\}$ nie można wybrać podciągu geometrycznego.

Jeśli jednak dodatkowo zażądamy, by wyrazy ciągu arytmetycznego były liczbami naturalnymi, to łatwo sprawdzić, że można jego różnicę powiększoną o 1 wziąć za iloraz szukanego podciągu geometrycznego i dowolnie wybrać wyraz początkowy.

Fale grawitacyjne, kapilarne i przypływowe

Po jeziorze przepłynęła motorówka. Kilka minut później fale, które wywołała, docierają do brzegu. Kolejne ich grzbiety osiągają ląd najpierw w dużych, potem w coraz krótszych odstępach czasu. Jakie jest wytłumaczenie tego zjawiska?

Żeby je zrozumieć, musimy najpierw poznać podstawowe własności fal na wodzie. Jeśli długość fali jest mała w porównaniu z głębokością wody – mówimy o falach na głębokiej wodzie, jeśli jest porównywalna lub większa – o falach na płytkiej wodzie, czyli o falach przypływowych. W tym drugim przypadku przyjął się obrazowy zwrot: „fale czują dno". Sam termin „płytka woda" może być nieco mylący. Dla fal o długościach centymetrowych płytką wodą będzie kałuża, dla fal o długościach kilometrowych płytki będzie nawet ocean. Prędkość fazowa fal na płytkiej wodzie nie zależy od długości fali, a tylko od głębokości h wody, zgodnie ze wzorem

$$v_f = \sqrt{gh}\,.$$

Zupełnie inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku fal na głębokiej wodzie. Zachowanie się fal krótkich zależy od napięcia powierzchniowego, fal długich – od sił grawitacji. Prędkość fazowa fal na głębokiej wodzie zależy od ich długości. Opisuje to wzór

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\varrho\lambda}}\,,$$

gdzie ϱ jest gęstością wody, natomiast σ współczynnikiem napięcia powierzchniowego. Dla długich fal (zwanych falami grawitacyjnymi) decydujące znaczenie ma pierwszy wyraz sumy występującej pod pierwiastkiem, a zatem możemy napisać

$$v_f \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\,.$$

Widzimy więc, że prędkość fali rośnie z jej długością jak $\lambda^{1/2}$. W przypadku fal krótkich, zwanych kapilarnymi, w sumie występującej pod pierwiastkiem dominuje drugi wyraz, tak więc

$$v_f \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\varrho\lambda}}\,.$$

Oznacza to, że prędkość fal kapilarnych maleje z ich długością jak $\lambda^{-1/2}$.

Możemy teraz powrócić do naszego problemu z motorówką. Fale, które obserwujemy na powierzchni jeziora, mają długości dużo większe niż 1,7 cm (umowna granica fal krótkich i długich), są to więc fale grawitacyjne. Płynąca motorówka wytwarza fale o różnych długościach. Na głębokiej wodzie te najdłuższe są najszybsze, a więc wyprzedzają pozostałe. Przy brzegu prędkość fali przestaje zależeć od długości, ale fale długie pozostawiają „krótszych rywali za plecami" (czy raczej za grzbietami). Czas upływający między kolejnymi uderzeniami o brzeg można obliczyć posługując się wzorem

$$T = \frac{\lambda}{v_f}\,,$$

gdzie prędkość v_f jest stała (nie zależy od długości fali). A zatem, w miarę jak do brzegu docierają coraz krótsze fale, czas ten maleje.

Wzory określające prędkość fal są wzorami przybliżonymi, nie uwzględniają lepkości i tarcia o dno. Zjawiska związane z lepkością możemy zaniedbać, ponieważ lepkość wody jest mała. Tarcie o dno w przypadku fal na głębokiej wodzie także można pominąć ze względu na małą amplitudę fali przy dnie, natomiast na płytkiej wodzie może mieć ono istotne znaczenie. Mimo to wzór $v_f = \sqrt{gh}$ na ogół dobrze opisuje własności tych fal.

Na zakończenie zagadka dla Czytelników. Dlaczego, jeśli brzeg jest płaski, fale przybijają prostopadle do niego? Jako wskazówkę należy wykorzystać fakt, że jeśli brzeg jest płaski, to głębokość wody jest niewielka i w sposób ciągły maleje do zera, a wraz z nią także prędkość fali.

K.R.