

Teoria osobliwości odwzorowań, a w szczególności twierdzenie Whitneya, bardzo dobrze nadają się do analizy zjawisk halo. Zajmijmy się znajdującym się w atmosferze ziemskiej kryształkiem lodu, który ma kształt graniastosłupa sześciokątnego. Najczęściej jest to jeden z wielu milionów kryształków tworzących chmurę typu *cirrostratus*. Będziemy interesować się dwiema ściankami kryształka: tą, przez którą promień światła słonecznego doń wnika i tą, przez którą go opuszcza po załamaniu. W naszej analizie pominiemy zjawiska takie, jak odbicie światła, rozszczepienie światła białego czy też całą gamę zjawisk falowych, które mogą wystąpić; skoncentrujemy się więc na uproszczonym opisie geometrycznym. Światło słoneczne potraktujemy jak wiązkę promieni równoległych, będziemy te promienie utożsamiać.

Odwzorowanie zbioru położenia kryształka lodu w sferę niebieską zdefiniowane jest mniej więcej tak: kryształek lodu o danym położeniu załamuje światło słoneczne, w wyniku czego otrzymamy promień biegnący w kierunku zależnym od położenia kryształka. Kierunek owego promienia wyznacza punkt na sferze niebieskiej, z którego obserwujemy świecenie. W ten sposób każdemu położeniu kryształka przyporządkowaliśmy punkt na sferze niebieskiej. Zauważmy, że tak określone odwzorowanie (tzw. funkcja Halo) zależy od położenia Słońca, dlatego też obserwowane na niebie zjawisko, będące kaustykami funkcji Halo, zależy od położenia Słońca.

Jeden kryształek da, oczywiście, tylko jeden promień załamany pomiędzy wybraną parą ścianek. Możemy zbudować odwzorowanie wszystkich możliwych położenia kryształków w sferę niebieską; różne położenia kryształka dadzą na ogół różne kierunki załamanych promieni, które możemy utożsamiać z punktami sfery niebieskiej. Sfera niebieska jest zbiorem dwuwymiarowym, natomiast zbiór możliwych położenia kryształków lodu jest zbiorem trójwymiarowym. Kryształek ma trzy stopnie swobody: dwa z nich są związane z położeniem jego długiej osi symetrii, trzeci z obrotem wokół niej (translacyjne stopnie swobody nie wnoszą nic nowego). Tak więc odwzorowanie zbioru możliwych położenia kryształków w sferę niebieską jest odwzorowaniem zbioru trójwymiarowego w dwuwymiarowy. To odwzorowanie nazwiemy funkcją Halo.

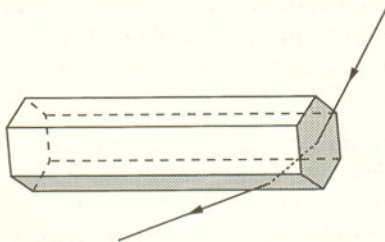
Może się zdarzyć, że kryształki lodu znajdujące się w przestrzeni rozmieszczone są w sposób przypadkowy i chaotyczny. Wtedy dziedziną funkcji Halo jest rzeczywistość trójwymiarowa. Może być jednak i tak, że niektóre orientacje kryształków będą uprzywilejowane (na przykład, przez warunki meteorologiczne), inne zaś nie wystąpią, tak więc dziedziną funkcji Halo nie będzie pełnym zbiorem możliwych położenia kryształków. Jeśli jest ona zbiorem jedno-, dwu- lub trójwymiarowym, mówimy odpowiednio o halo jedno-, dwu- lub trójwymiarowym. W dalszym ciągu dziedzinę funkcji Halo będziemy nazywać zbiorem generującym.

Przykładem halo jednowymiarowego są słońca poboczne, które powstają, gdy wszystkie kryształki lodu są ustawione pionowo długimi osiami; tworzą one wtedy zbiór jednowymiarowy, a kaustyka składa się z dwóch punktów, które są właśnie słońcami pobocznymi. Na przeciwnym biegunie sytuują się małe i duże halo, które powstają przy przypadkowym rozkładzie kryształków w atmosferze. Zbiór generujący jest wtedy trójwymiarowy.

Skupmy naszą uwagę na dwuwymiarowych zbiorach generujących. Zgodnie z twierdzeniem Whitneya typowe odwzorowania gładkie zbiorów dwuwymiarowych w zbiory dwuwymiarowe mogą mieć osobliwości dwójakiego rodzaju: fałdy i plisy. W szczególności dotyczy to także dwuwymiarowej funkcji Halo. Jej osobliwości ważne są z tego powodu, że kryształki znajdujące się w pobliżu punktu osobliwego załamują światło prawie w tym samym kierunku, tak więc obserwujemy z tego kierunku silne świecenie. Obserwowane na niebie zjawisko halo jest więc kaustyką odwzorowania zbioru położenia kryształków lodu w sferę niebieską.

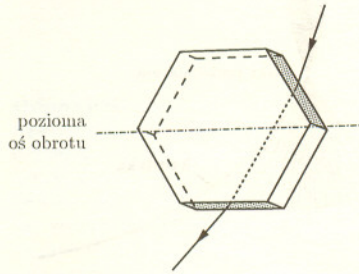
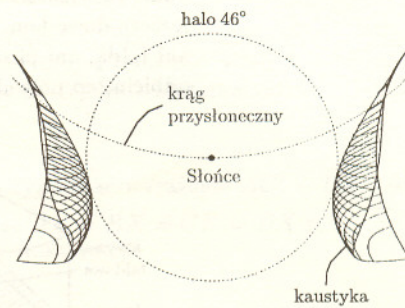
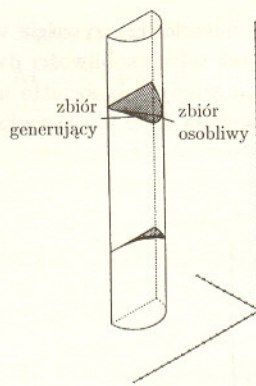
Halo dwuwymiarowe

Pierwszym przykładem niech będą kryształki lodu o kształcie sześciokątnych kolumnienek, spadające w ten sposób, że ich główna oś pozostaje w płaszczyźnie poziomej (rys. 1). Taki kryształek ma dwa stopnie swobody. Pierwszy związany jest z obrotami jego długiej osi w płaszczyźnie poziomej, drugi z obrotami wokół tej osi. Interesują nas promienie wchodzące przez jedną z sześciokątnych podstaw kryształka i wychodzące przez prostokątną ściankę boczną. Zbiór generujący jest dwuwymiarowy. Jest on niespójny, gdyż składa się z dwóch osobnych kawałków odpowiadających dwóm sześciokątnym podstawom kryształka. Również niespójna jest kaustyka funkcji Halo. Tworzy ona łuki styczne dolno-boczne dużego halo (rys. 2). Osobliwość jest w tym przypadku fałdą.



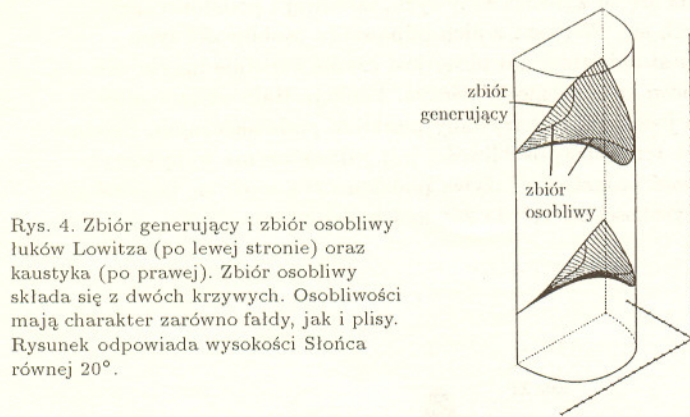
Rys. 1

Rys. 2. Zbiór generujący i zbiór osobliwy łuku stycznego dolno-bocznego dużego halo (po lewej stronie). Kaustyka funkcji halo (po prawej stronie). Osobliwość ma charakter faldy. Rysunek odpowiada wysokości Słońca równej 28° .

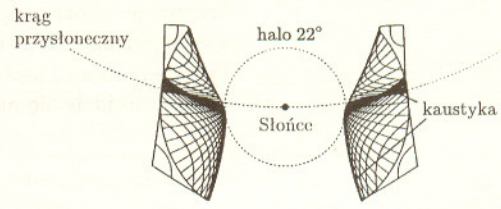


Rys. 3. Sześciokątne lodowe płytki wirujące wokół długiej osi symetrii sześciokąta odpowiadają za powstawanie łuków Lowitza.

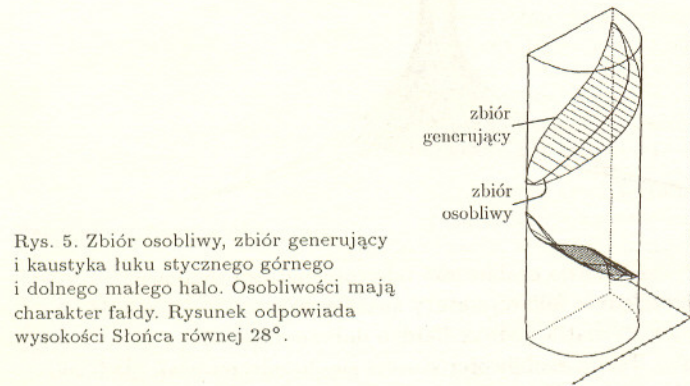
Drugim przykładem jest jedna z rzadszych postaci halo, tak zwane łuki Lowitza. Tworzone są one przez promienie załamane pomiędzy dwiema ściankami płaskiego, sześciokątnego kryształka, wirującego wokół poziomej, dłuższej osi symetrii sześciokąta (rys. 3). Powstanie łuków Lowitza wymaga bardzo szczególnych warunków, dlatego są one tak rzadkie. Podobnie jak poprzednio, zbiór generujący jest dwuwymiarowy i niespójny, jednak osobliwości odwzorowania Halo są bardziej złożone, gdyż równocześnie istnieje i faldy, i plisy (rys. 4). Jak pokazują symulacje komputerowe wykonane w 1980 r. przez Roberta Greenlera i jego współpracowników z Uniwersytetu Wisconsin w Milwaukee, część kaustyki odpowiadająca plisie cechuje się bardzo małym natężeniem światła, dlatego w większości przypadków, gdy łuki Lowitza są widoczne, plisa pozostaje niezauważona.



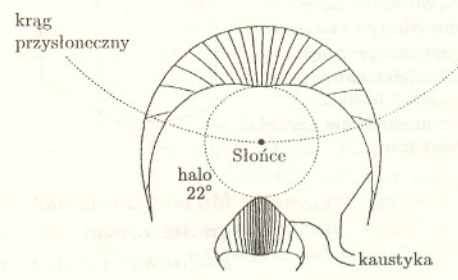
Rys. 4. Zbiór generujący i zbiór osobliwy łuków Lowitza (po lewej stronie) oraz kaustyka (po prawej). Zbiór osobliwy składa się z dwóch krzywych. Osobliwości mają charakter zarówno faldy, jak i plisy. Rysunek odpowiada wysokości Słońca równej 20° .



Kolejnym, trzecim przykładem dwuwymiarowego halo są (dużo powszechniejsze od łuków Lowitza) górny i dolny łuk stycznego małego halo (rys. 5).



Rys. 5. Zbiór osobliwy, zbiór generujący i kaustyka łuku stycznego górnego i dolnego małego halo. Osobliwości mają charakter faldy. Rysunek odpowiada wysokości Słońca równej 28° .

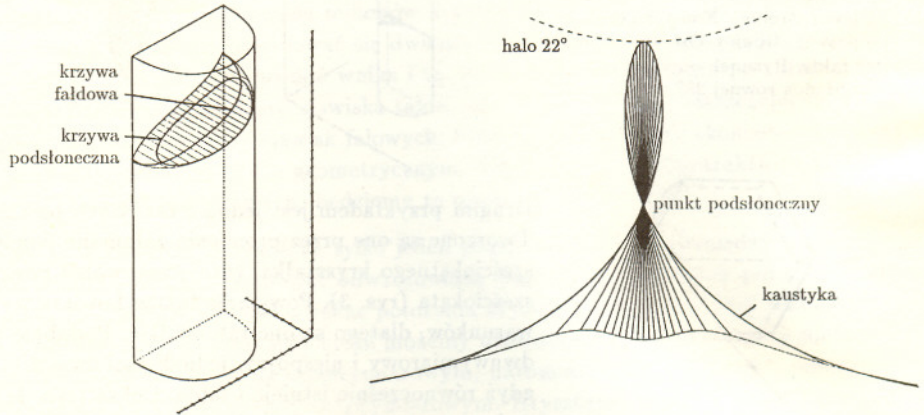


Osobliwości wyjątkowe

Twierdzenie Whitneya mówi, że typowymi osobliwościami gładkiego, dwuwymiarowego odwzorowania są faldy i plisy. Zostało analitycznie dowiedzione, że poza kilkoma wyjątkami, o których za chwilę, osobliwości górnego i dolnego łuku stycznego są faldą. Jednak w przypadku pewnych rodzajów dwuwymiarowego halo nie istnieje dowód gładkości funkcji Halo, która jest wymagana przez założenia twierdzenia Whitneya.

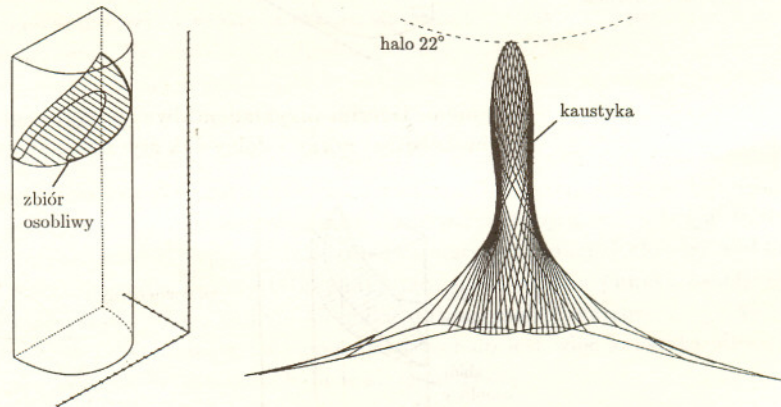
Fakt, że większość tych osobliwości rzeczywiście wygląda jak fałda lub plisa, nie jest jeszcze dowodem. Istnieją też takie osobliwości dwuwymiarowych halo, które nie są ani fałdą, ani plisą. Tak jest wtedy, gdy światło ulega nie tylko załamaniu, ale również odbiciu, co powoduje, że funkcja Halo nie jest gładka.

Rys. 6. Zbiór generujący, zbiór osobliwy i kaustyka dolnego łuku styczności małego halo dla wysokości Słońca równej 17° . Zbiór osobliwy składa się z dwóch przecinających się krzywych, faldowej i podslonecznej. Krzywa podsloneczna jest osobliwością innego rodzaju niż fałda czy plisa.



Wierzchołek dolnego łuku styczności, pokazanego na rysunku 6, położony jest wówczas na wysokości $22^\circ - 17^\circ$, czyli 5° ponad linią horyzontu. Taki łuk styczności można oglądać z pokładu samolotu, ale nie z ziemi. Zbiór osobliwy jest w tym przypadku bardzo szczególny. Składa się on z dwóch krzywych, faldowej i podslonecznej, dwukrotnie przecinających się. Pierwsza z nich odpowiada osobliwości typu fałda, jednak druga nie jest ani fałdą, ani plisą, jest czymś zupełnie innym niż osobliwości, o których mówi twierdzenie Whitneya. Funkcja Halo odwzorowuje krzywą podsloneczną na jeden punkt nazywany punktem podslonecznym. Zgodnie z twierdzeniem Whitneya ten rodzaj osobliwości jest jednak czymś wyjątkowym. Powyżej opisana osobliwość związana z krzywą podsloneczną może się pojawić gdy Słońce znajdzie się na wysokości od 11° do 25° nad horyzontem.

Rys. 7. Odpowiednio dobrane małe zaburzenie odwzorowania z rysunku 6 daje kaustykę będącą obrazem fałdy. Zbiór osobliwy z poprzedniego rysunku został rozerwany w miejscu przecięcia dwóch krzywych. Tak zdeformowany przypomina „wyciągniętą” literę Z. Odpowiednio małe zaburzenie nie zmienia jego jakościowego charakteru.



Model zjawisk halo oparty na analizie osobliwości odwzorowań jest modelem uproszczonym, gdyż nie uwzględnia falowej natury światła, a zatem nie pozwala analizować rozkładu natężenia światła, jednak bardzo dobrze daje sobie radę z opisem geometrii zjawiska. Teoria osobliwości stosuje się do odwzorowań gładkich. I choć w każdym przypadku funkcji Halo problem ten należy analizować osobno, to wydaje się, że „na ogół”, poza pewnymi wyjątkowymi sytuacjami rzeczywiście jest to odwzorowanie gładkie. Z tego powodu Walter Tape, matematyk amerykański zajmujący się zastosowaniami matematyki w naukach przyrodniczych, takich jak geologia czy meteorologia (na którego pracach opiera się ten tekst) powiada z lekką przesadą: Czemu zawdzięcza swoje istnienie zjawisko halo? Istnieje ono dzięki różniczkowalności (oczywiście, funkcji Halo)!