

Niech f będzie ...

(Złośliwi twierdzą, że gdyby Juliusz Verne był matematykiem, to *Dwadzieścia tysięcy mil podmorskiej żeglugi* zaczynałoby się następująco.

Niech Ned Land będzie oszczepnikiem, a Conseil – służącym narratora. Niech ponadto Nautilus będzie statkiem podwodnym i niech kapitan Nautilusa nazywa się Nemo.

My tego twierdzenia komentować nie będziemy.)

Na odwzorowanie f płaszczyzny \mathbf{R}^2 w siebie możemy patrzeć jak na parę funkcji określonych na \mathbf{R}^2 i o wartościach w zbiorze \mathbf{R} liczb rzeczywistych, symbolicznie $f = (f_1, f_2)$. Mówimy, że odwzorowanie f jest gładkie, gdy każda z funkcji f_1, f_2 jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

Czytelnik zechce się zastanowić, czy istotnie każde gładkie odwzorowanie $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ można w ten sposób przedstawić.

Jako się więc rzekło, niech f będzie gładkim odwzorowaniem płaszczyzny \mathbf{R}^2 w siebie. Przy omawianiu własności f nie sposób posłużyć się kartką papieru z wykresem, bo do jego narysowania potrzebne są $2 + 2 = 4$ wymiary. Pomóżmy zatem naszej ubogiej wyobraźni w inny sposób. Pomyślmy mianowicie o dwóch płaszczyznach, poziomej (α) i pionowej (β). Bierzemy punkt $A \in \alpha$ i rzutujemy go pionowo na gładką powierzchnię π , która ma tę własność, że nad każdym punktem α leży dokładnie jeden punkt π . Otrzymany punkt z π rzutujemy poziomo na β i w ten właśnie sposób otrzymujemy $f(A)$. Może się zdarzyć tak, że dwa różne punkty A_1 i A_2 mają ten sam obraz. Punkt A , który ma tę własność, że w dowolnie małym jego otoczeniu znajdziemy takie punkty A_1 i A_2 , nosi nazwę punktu osobliwego odwzorowania f . Posługując się naszą poglądową interpretacją f stwierdzimy bez kłopotu, że płaszczyzna styczna do π w punkcie leżącym pionowo nad punktem osobliwym A jest prostopadła do płaszczyzny β .

Zbiór wszystkich punktów osobliwych f nazwiemy krótko zbiorem osobliwym f , obraz zaś zbioru osobliwego – kaustyką.

Pora na przykłady. Pierwszy z nich, odwzorowanie $g(x, y) = (x^2, y)$, pokazany jest na rysunku 1.



Rozwiązanie zadania M 725.

Rozważmy płaszczyznę P o równaniu

$$z = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}} \cdot x. \text{ Czytelnik}$$

z łatwością sprawdzi, że dla punktów

$$\text{należących do tej płaszczyzny zachodzi}$$

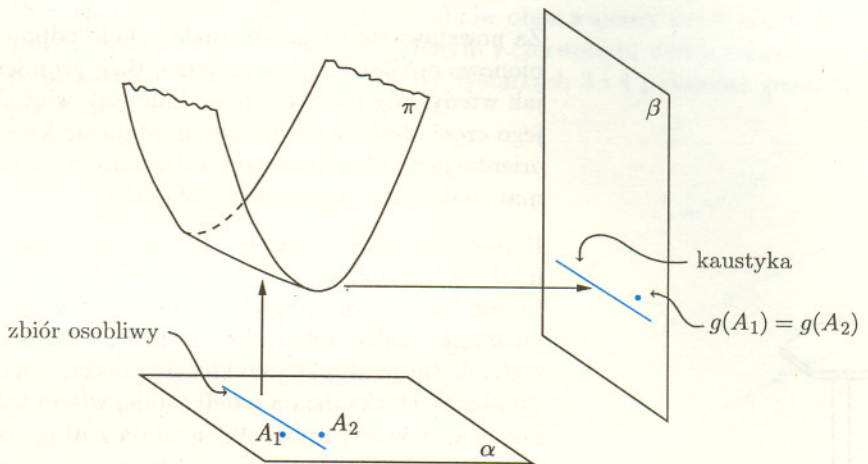
$$\text{równość } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2},$$

zatem jej część wspólna z elipsoidą

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ jest równa}$$

$$\text{przecięciu } P \text{ ze sferą } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

a więc jest okręgiem.



Rys. 1. Przekształcenie g z osobliwością „fałda”. Gdy np. $g(x, y) = (x^2, y)$, to dowolne dwa punkty A_1 i A_2 , symetryczne względem prostej złożonej z punktów osobliwych g , mają ten sam obraz.



Rozwiązanie zadania F 396.

Masa powietrza o objętości piłki jest równa $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 6,7$ g. Porównując siłę dośrodkową do siły Magnusa mamy

$$\frac{Mv^2}{r} = 2m\omega v.$$

Podstawiając prędkość kątową $\omega = \frac{v}{R}$ do powyższego wzoru otrzymujemy

$$r = \frac{MR}{2m\epsilon} \approx 17 \text{ m}.$$

Widzimy tu osobliwość zwaną fałdą. Zbiór osobliwy i kaustyka odwzorowania g to linie proste. Drugi rodzaj osobliwości to tzw. plisa (rys. 2); niech nam krawcy wybaczą terminologię. Obrazowo można powiedzieć, że plisa to fałda, która ma swój początek. Zbiór osobliwy plisy to krzywa przypominająca wyglądem parabolę, a kaustyka ma kształt „dzióbka”.

Okazuje się, że w zasadzie innych osobliwości przekształcenia gładkie płaszczyzny w siebie nie miewają. Co to znaczy? Rozpatrzmy zbiór \mathcal{G} wszystkich przekształceń gładkich $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Umówmy się, że dwa przekształcenia z tego zbioru są bliskie, jeśli w każdym punkcie \mathbf{R}^2 mają bliskie wartości (razem z pochodnymi dowolnego rzędu).



Rozwiązanie zadania F 395.

Współczynnik załamania zależy od gęstości powietrza ρ :

$$(n - 1) = (n_0 - 1) \frac{\rho}{\rho_0}, \quad N = \frac{N_A \rho}{\mu},$$

gdzie N_A oznacza liczbę Avogadro. Podstawiając $n - 1$ oraz N do wyrażenia na μ_1 otrzymujemy

$$\mu_1 = \frac{32\pi^3 (n_0 - 1)^2 \rho \mu}{3\lambda^4 \rho_0^2 N_A}.$$

Ponieważ ρ zależy od wysokości, przechodzimy do wzoru całkowego

$$I(x) = I_0 \exp\left(-\int_0^x \mu_1 dh\right).$$

Dla promienia słonecznego padającego pod kątem 0° (prostopadle do powierzchni Ziemi) możemy skorzystać z wzoru na ciśnienie hydrostatyczne $p = \int \rho g dh$ otrzymując

$$\alpha = \int \rho dh = \frac{p}{g}, \quad p = 1013 \text{ hPa},$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim. Ostatecznie otrzymujemy relację

$$I = I_0 e^{-\alpha},$$
$$\alpha = \frac{32\pi^3 (n_0 - 1)^2 p \mu}{3\lambda^4 \rho_0^2 g N_A}.$$

Stosunek natężenia światła rozproszonego do padającego wyraża ułamek

$$k = \frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - e^{-\alpha}.$$

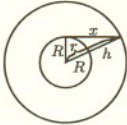
Dla światła niebieskiego wynosi on $k \approx 28,6\%$, dla czerwonego $k \approx 3,5\%$.

Gdy światło pada pod kątem 90° (stycznie do powierzchni Ziemi), możemy skorzystać z wzoru barometrycznego

$$\rho = \rho_0 e^{-ah}, \quad a = \frac{\rho_0 g}{p}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$x^2 + R^2 = r^2 = (R + h)^2.$$



Zaniedbując h^2 mamy $h \approx \frac{x^2}{2R}$ (bo grubość atmosfery $h \approx 20 \text{ km} \ll R$).

$$\beta = \int_0^\infty \rho dx = \int_0^\infty \rho_0 e^{-\frac{ax}{2R}} dx = \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\frac{2\pi R}{\rho_0 g}};$$

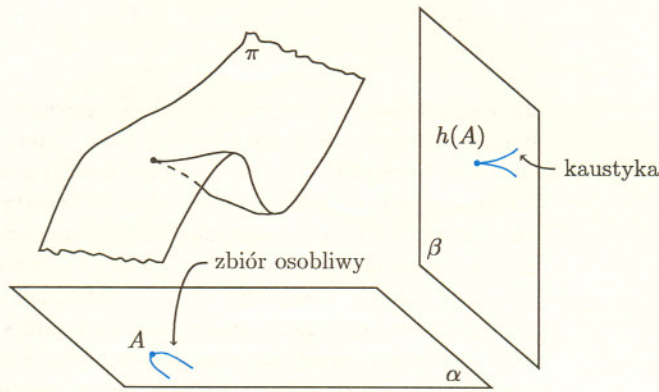
$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi R g \rho_0}{p}} \cdot \alpha = 10,9 \cdot \alpha.$$

Stąd też $k = \frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - e^{-\beta}$,

dla światła niebieskiego $k \approx 97,5\%$, a dla światła czerwonego $k \approx 32,5\%$.

Z powyższych rezultatów jasno wynika, że kolor zachodzącego Słońca jest czerwony. W istocie wynik uzyskany dla promienia stycznego jest zaniżony, gdyż nie uwzględniliśmy wydłużonej (na skutek załamania drogi) światła w atmosferze.

O ilości rozmaitych prób stosowania teorii katastrof w innych naukach można się przekonać wertując książkę „Catastrophe theory for scientists and engineers” autorstwa Roberta Gilmore’a pracującego w Institute for Defense Analyses w Arlington w USA.



Rys. 2. $h(x, y) = (x^3 - xy, y)$ to jeden z najprostszych przykładów odwzorowania z osobliwością zwaną plisą. W tym konkretnym przypadku zbiór osobliwy to parabola o równaniu

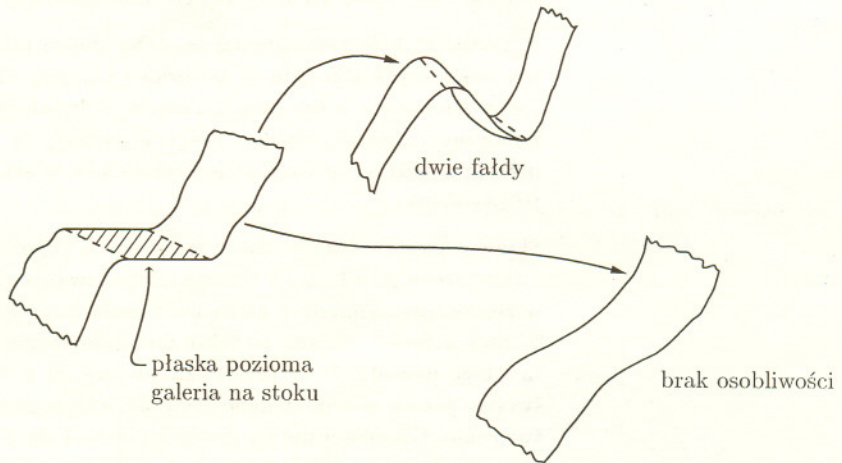
$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - xy) \equiv 3x^2 - y = 0.$$

Czytelnik może łatwo sprawdzić, że kaustyka tego odwzorowania to krzywa z dzióbkiem składająca się z dwóch połówek paraboli półsześciennej.

W zbiorze \mathcal{G} wyróżnimy mniejszy podzbiór \mathcal{D} przekształceń „dobrych”: takich, które mają wyłącznie punkty osobliwe odpowiadające fałdzie lub wierzchołkowi plisy. Amerykański matematyk Hassler Whitney udowodnił w 1955 roku następujące

Twierdzenie. \mathcal{D} jest otwartym i gęstym podzbiorem \mathcal{G} .

Gęstość \mathcal{D} oznacza tyle, iż blisko każdej funkcji $f \in \mathcal{G}$ leży pewna funkcja „dobra”, z otwartości \mathcal{D} zaś wynika, że każda funkcja „dobra” ma małe otoczenie składające się wyłącznie z innych funkcji „dobrych”. Przykłady niedobrych osobliwości Czytelnik Wnikliwy zechce sobie sam wyobrazić, a Czytelnik Leniwy może zerknąć na rysunek 3.



Rys. 3. Blisko przekształcenia „stok z płaską galerią” ze zbioru osobliwym w postaci nieskończonego pasa leżą rozmaite przekształcenia ze zbioru \mathcal{D} : na przykład f_1 z dwiema fałdami i f_2 bez żadnych osobliwości.

Twierdzenie Whitneya fizycy stosują do wyjaśniania zjawiska halo (można o tym przeczytać w tym numerze *Delty*). Ten fakt oraz ukuta przez Stanisława Lema, przy okazji porównywania matematyki z fizyką, przenośnia o szalonych krawcach usprawiedliwiają po części użycie terminów fałda i plisa.

Twierdzenie Whitneya uogólnił na przypadek wymiaru ≥ 3 Francuz, René Thom, medalista Fieldsa z 1958 roku. Moment ukazania się w 1971 roku jego pracy *Stabilność strukturalna i morfogeneza* to narodziny słynnej teorii katastrof, którą z różnym powodzeniem usiłowano stosować w biologii, socjologii, medycynie, aerodynamice, termodynamice, klimatologii itd. To już jednak temat na zupełnie inny artykuł.

P.S.