Klub 44

$\otimes\sqrt{\ldots!}=44$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 1995

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 277 (WT=3,46) i 278 (WT=1,41) z numeru 3/1994

Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	47,30
Paweł Lizak	– Puławy	43,47
Waldemar Pompe	– Warszawa	40,24
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	39,72
Lesław Skrzypek	– Rzeszów	36,67

Pan Przemysław Gadziński jest czternastym Weteranem matematycznego **Klubu 44.**

Zadania z matematyki nr 291, 292

Redaguje Marcin E. KUCZMA

291. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x, dla których $x^2+19x+94$ jest kwadratem liczby całkowitej.

292. Udowodnić, że dla każdych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle 0; \pi/4\rangle$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{\operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} x_n} \le \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \ldots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \ldots + \cos^2 x_n}}.$$

Zadanie **292** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1994

Przypominamy treść zadań:

283. Wyznaczyć wszystkie liczby dodatnie a, dla których funkcja $f(x) = ax(1-x)$ ma następującą własność: istnieje taka liczba $c \in (0;1)$, że $f(f(c)) = c \ne f(c)$.

284. Na bokach AB i AC trójkąta ostrokątnego ABC obrano odpowiednio punkty M i N. Okręgi, których średnicami są odcinki BN i CM, przecinają się w punktach P i Q. Udowodnić, że ortocentrum trójkąta ABC leży na prostej PQ.

283. Jeśli liczba $c \in (0;1)$ spełnia postulowane warunki

$$a^2c(1-c)(1-ac+ac^2) = c \ne ac(1-c),$$

czyli

$$a^2(1-c)(1-ac+ac^2) = 1 \ne a(1-c),$$

to liczba $b = 1-c$ spełnia warunki

(1) $$a^2b(1-ab+ab^2) = 1 \ne ab.$$

Pierwszy z nich zapisujemy w postaci równania

$$a^2b(1-ab) = 1 - a^3b^3,$$

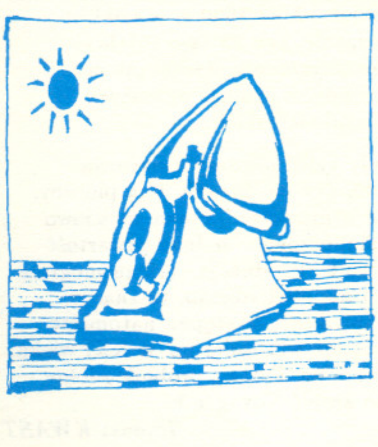
które następnie dzielimy stronami przez różny od zera czynnik $(1-ab)$:

(2) $$a^2b = 1 + ab + a^2b^2.$$

Traktując to jako równanie kwadratowe z niewiadomą b (i „parametrem” a), obliczamy wyróżnik $\Delta = a^2(a+1)(a-3)$, który musi być nieujemny. Stąd $a \ge 3$.

Gdy $a = 3$, równanie (2) ma pierwiastek podwójny $b = 1/3$, niedopuszczalny, w myśl warunku $ab \ne 1$. Gdy $a > 3$, równanie (2) ma dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma równa się $(a^2-a)/a^2 > 0$, a iloczyn równa się $1/a^2 \le 1/9$ (Viète); zatem co najmniej jeden z pierwiastków leży w przedziale $(0;1)$. Z postaci równania (2) widać, że ab nie może być jedynką (dla $a > 3$); są więc spełnione warunki (1).

Wniosek: funkcja f ma omawianą własność wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 3$.



284. Niech B' i C' będą spodkami wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków B i C na przeciwległe boki. Oznaczmy rozważane w zadaniu okręgi (o średnicach BN i CM) odpowiednio przez k_1 i k_2, a okrąg, którego średnicą jest bok BC – przez k_3; przechodzi on przez punkty B' i C'. Tak więc

$$k_1 \cap k_3 = \{B, B'\}, \qquad k_2 \cap k_3 = \{C, C'\}, \qquad k_1 \cap k_2 = \{P, Q\}.$$

Zatem prosta PQ przechodzi przez punkt przecięcia prostych BB' i CC', czyli ortocentrum trójkąta ABC.

Zadania z fizyki nr 189, 190

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 173 (WT=3,23), 174 (WT=3,23), 179 (WT=2,80) i 180 (WT=3,95) z numerów 2/1994, 5/1994 i 6/1994

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	38,37
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	34,46
Aleksander Surma	– Myszków	21,49
Dariusz Wilk	– Rzeszów	19,43
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	12,30
Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	11,70
Przemysław Gworys	– Częstochowa	11,69

189. Gdy włączono rotacyjną pompę próżniową, ciśnienie pod kloszem spadło w czasie $t_1 = 30$ s od ciśnienia atmosferycznego p_{atm} do wartości $(1/2)p_{atm}$. Po długim czasie praca pompy doprowadziła do obniżenia ciśnienia do wartości $p_k = (1/100)p_{atm}$; niższego ciśnienia nie udało się osiągnąć ze względu na nieszczelności klosza. Jeśli pompę wyłączyć (i zamknąć zawór prowadzący do niej), to po jakim czasie dopływ powietrza przez nieszczelności spowoduje wzrost ciśnienia do $\frac{1}{2}p_{atm}$?

Wskazówka: Przyjmijmy, że ilość gazu przepływającego przez mały otwór jest proporcjonalna do różnicy ciśnień (jest to uzasadnione wtedy, gdy o szybkości przepływu decyduje lepkość, tzn. w praktyce dla bardzo małych szczelin).

190. Ocenić orientacyjnie maksymalną wysokość, na jaką może się wzbić latawiec o powierzchni płatu $S = 0{,}5\ \mathrm{m}^2$ i masie $m = 400$ g uwiązany na lince o masie na jednostkę długości $\sigma = 10$ g/m, jeśli prędkość wiatru wynosi $v = 15$ m/s. Gęstość powietrza jest równa $\varrho = 1{,}3\ \mathrm{kg/m}^3$.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1994

Przypominamy treść zadań:

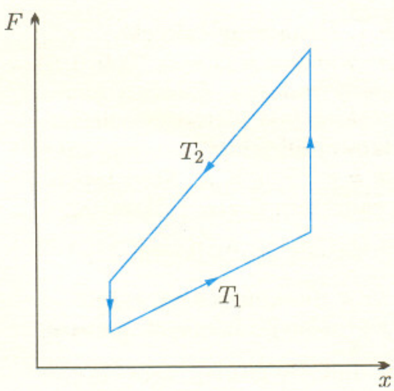
181. Cienka powłoka kulista o masie m i promieniu r znajdująca się w próżni i naładowana ładunkiem Q rozpadła się nagle na małe kawałeczki. Obliczyć prędkość uzyskaną przez odpryski w wyniku ich wzajemnego odpychania.

182. Siła sprężystości wywierana przez sprężynę dana jest wzorem $F = kx$ (x – wydłużenie), przy czym stała sprężystości k maleje ze wzrostem temperatury. Udowodnić, że adiabatycznemu rozciąganiu tej sprężyny towarzyszy spadek temperatury.

181. Powłoka ma początkowo energię elektrostatyczną równą $E = \dfrac{Q^2}{2C}$, gdzie C jest pojemnością kuli równą $C = 4\pi\varepsilon_0 r$. Energia ta przechodzi w energię kinetyczną odprysków, zatem

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

czyli $v = \dfrac{Q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 rm}}$.



182. a) Załóżmy na początek, że przy adiabatycznym rozciąganiu sprężyny nie ma zmiany temperatury, tzn. adiabata jest jednocześnie izotermą. Z dwóch takich „adiabato-izoterm" odpowiadających temperaturom T_1 i T_2 oraz dwóch „izochor" (przemian prowadzących od jednej temperatury do drugiej, przy stałym wydłużeniu x) możemy zbudować cykl przedstawiony na rysunku. Jeśli obieg cyklu jest lewoskrętny, to kurcząc się (wzdłuż „adiabato-izotermy" T_2) sprężyna wykonuje większą pracę, niż trzeba włożyć w jej rozciąganie (wzdłuż T_1), zatem mamy do czynienia z silnikiem. Z założenia o wzroście siły przy spadku temperatury wynika, że $T_1 > T_2$. Energia jest dostarczana silnikowi w formie ciepła przekazywanego na pionowych „izochorach": wzdłuż lewej „izochory" temperatura rośnie, czyli ciepło jest dostarczane, a wzdłuż prawej ciepło jest odbierane. Zauważmy jednak, że nie zmieniając lewej części cyklu możemy dowolnie odsunąć prawą „izochorę", czyli dowolnie zwiększyć pracę silnika nie zmieniając dostarczonego ciepła. Jest to sprzeczne z pierwszą zasadą termodynamiki. Założyliśmy tu, że ciepło dostarczone na lewym odcinku jest ograniczone, czyli ciepło właściwe sprężyny ma skończoną wartość.

b) Skoro adiabata nie pokrywa się z izotermą, to zbudujmy cykl Carnota z dwóch izoterm i dwóch adiabat. Aby go zilustrować graficznie, wystarczy zastąpić pionowe odcinki na rysunku bardziej skomplikowanymi krzywymi (adiabatami), podczas gdy izotermy T_1 i T_2 pozostaną nie zmienione. Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki ciepło musi odpływać przy wyższej temperaturze, czyli wzdłuż dolnej izotermy T_1. Skoro utrzymanie stałej temperatury przy rozciąganiu sprężyny wymaga dostarczania ciepła, to jasne jest, że zaprzestanie dopływu ciepła spowoduje spadek temperatury, cbdo.

Posługując się nieco bardziej zaawansowanymi metodami można udowodnionemu powyżej twierdzeniu nadać postać ilościową:

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{adiab} = Tx\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}T}\frac{1}{c_x}\,,$$

gdzie c_x jest pojemnością cieplną sprężyny przy stałym wydłużeniu, tzn. ilorazem dostarczonego ciepła i przyrostu temperatury.