Zasada szufladkowa Dirichleta (1)

Częstym motywem zadań olimpijskich jest *zasada szufladkowa Dirichleta*, która mówi, że *jeżeli $kp+1$ kul wrzucimy do p szuflad, to w pewnej szufladzie znajdzie się co najmniej $k+1$ kul.* Stąd na mocy tej zasady stwierdzamy, że np. wśród 13 liczb naturalnych jest co najmniej 7 jednakowej parzystości oraz co najmniej dwie, których różnica jest podzielna przez 12; podobnie w klasie 25-osobowej znajdziemy co najmniej troje uczniów urodzonych w tym samym miesiącu itd. Mamy nadzieję, że podane przykłady pokazują, jak prosta jest sama zasada szufladkowa Dirichleta. Dlaczego trafia więc ona do zadań olimpijskich? Otóż przy rozwiązywaniu zadania, w którym chcemy zastosować zasadę szufladkową, najtrudniej jest stwierdzić, czym w zadaniu są „kule", a czym „szuflady".

Zadanie 1. (Bundeswettbewerb Mathematik – Olimpiada Niemiecka, 1994)

Danych jest 11 liczb rzeczywistych. Udowodnić, że co najmniej dwie spośród nich mają rozwinięcia dziesiętne pokrywające się w nieskończonej ilości miejsc po przecinku. (Jeśli liczba ma skończone rozwinięcie dziesiętne, to uzupełniamy je zerami.)

Rozwiązanie.

Przypuśćmy, wbrew tezie, że każda para rozważanych liczb pokrywa się na skończonej ilości miejsc po przecinku. Par tych liczb jest również skończenie wiele (dokładnie $\binom{11}{2}=55$). Zatem dla dostatecznie dużej liczby naturalnej n, na n-tym miejscu po przecinku żadna para nie będzie się pokrywać. To jednak jest niemożliwe – liczb mamy 11, cyfr w układzie dziesiętnym 10, więc – na mocy zasady szufladkowej Dirichleta – pewne dwie liczby pokrywają się na n-tym miejscu po przecinku. Uzyskana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

Zadanie 2. (Olimpiada Japońska, 1991)

Dany jest szesnastowyrazowy ciąg liczb jednocyfrowych różnych od zera. Wykazać, że spośród wyrazów tego ciągu można wybrać kilka kolejnych, których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie.

Niech $a_1,\ldots,a_{16}$ będzie rozważanym ciągiem. Dla każdego $i\in\{1,\ldots,16\}$ niech $p_i=a_1\cdot\ldots\cdot a_i$. Rozłóżmy liczbę p_i na czynniki pierwsze:

$$p_i=2^{2\alpha_i+w_i}\cdot 3^{2\beta_i+x_i}\cdot 5^{2\gamma_i+y_i}\cdot 7^{2\delta_i+z_i},$$

gdzie każda z liczb w_i, x_i, y_i, z_i jest równa 0 lub 1. Oznaczmy czwórkę uporządkowaną (w_i,x_i,y_i,z_i) przez s_i. Jeśli dla pewnego i jest $s_i=(0,0,0,0)$, to liczba p_i jest pełnym kwadratem, co dowodzi tezy zadania. Załóżmy więc, że dla każdego i mamy $s_i\neq(0,0,0,0)$. Czwórek takich jest piętnaście, liczb zaś p_i szesnaście. Zatem na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieją takie dwie liczby k, l należące do zbioru $\{1,\ldots,16\}$, że $k<l$ i $s_k=s_l$. Stąd łatwo dostajemy, że liczba $p_l/p_k=a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_l$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Poniższe zadania można rozwiązać wykorzystując zasadę szufladkową. Jak?

3. Dana jest liczba pierwsza $p>5$. Udowodnić, że w nieskończonym ciągu 1, 11, 111, 1111, … istnieje nieskończenie wiele wyrazów podzielnych przez p.

4. Dane są liczby całkowite $a_1,a_2,\ldots,a_{11}$. Udowodnić, że istnieje taki ciąg $x_1,x_2,\ldots,x_{11}$ o wyrazach ze zbioru $\{-1,0,1\}$ nie złożonych z samych zer, dla którego liczba $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_{11}x_{11}$ jest podzielna przez 1994.

5. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $k>1$ istnieje wielokrotność liczby k, mniejsza od k^4, którą można zapisać za pomocą co najwyżej czterech różnych cyfr (w dziesiętnym układzie pozycyjnym).

6. Określamy rekurencyjnie ciąg $\{F_n\}$: $F_1=1$, $F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Udowodnić, że w zbiorze $\{F_1,F_2,\ldots,F_{1000001}\}$ istnieje liczba zakończona co najmniej trzema zerami.

7. Dowieść, że z (k^2+1)-wyrazowego ciągu różnych liczb rzeczywistych można wybrać $(k+1)$-wyrazowy podciąg monotoniczny.

Krzysztof CHEŁMIŃSKI
Waldemar POMPE