O liczbach przestępnych

W artykule Roberta Hajłasza „Dowody niewymierności pewnych liczb” (*Delta* 10/1994) wspomniane zostało, że liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest niewymierna. Okazuje się, że w pewnym sensie jest ona nawet „bardzo niewymierna”. Co przez to rozumiemy – okaże się za chwilę. Ale najpierw pewna definicja.

Liczbą algebraiczną nazywamy dowolny pierwiastek równania algebraicznego

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

o współczynnikach całkowitych.

I tak dowolna liczba wymierna p/q jest algebraiczna, jako że jest ona pierwiastkiem równania $qx - p = 0$. Można też wykazać, że wszystkie liczby wyrażające się za pomocą czterech podstawowych działań oraz pierwiastkowania, wykonywanych na liczbach całkowitych, są algebraiczne, tj. algebraiczne są wszystkie liczby postaci $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}$, $\sqrt{\sqrt{2}+5}/\sqrt[7]{9}$... itd. Liczby, które nie są algebraiczne, nazywamy *przestępnymi*. Ponieważ liczby wymierne są algebraiczne, więc liczby przestępne są niewymierne. A skoro liczb przestępnych nie da się również przedstawić za pomocą czterech podstawowych działań oraz pierwiastkowania, wykonywanych na liczbach całkowitych, więc liczby przestępne są w pewnym sensie nawet „bardzo niewymierne”. Ale, czy liczby przestępne... istnieją? Innymi słowy, czy istnieje choć jedna liczba, która nie jest pierwiastkiem równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych?

Choć problemem istnienia liczb przestępnych interesował się już Leonhard Euler, to jednak pierwszym, który udowodnił (w 1844 r.) ich istnienie, był Joseph Liouville (patrz *Delta* 1/1993). Konkretne liczby, o których udowodnił, że są przestępne, były jednak nieciekawe – w tym sensie, że zapewne nikt nigdy ich nie użył przy rozpatrywaniu innych problemów matematycznych. Istotny postęp nastąpił, gdy w 1873 roku Charles Hermite udowodnił, że liczba e jest przestępna, i gdy dziewięć lat później Ferdinand Lindemann uczynił to samo w stosunku do liczby π. O ważności liczb e oraz π nikogo nie trzeba przekonywać. Co więcej, z przestępności liczby π wynika niewykonalność kwadratury koła cyrklem i linijką.

Pod koniec XIX wieku było też wiadomo, że liczb przestępnych jest bardzo, bardzo dużo, choć nie wiadomo było (poza pewnymi konkretnymi przypadkami), jak rozstrzygnąć, czy konkretnie wskazana liczba jest przestępna.

Taki był mniej więcej „stan meczu” w chwili, gdy David Hilbert w 1900 roku na II Międzynarodowym Kongresie Matematycznym wśród słynnych 23 problemów sformułował problem następujący:

Udowodnić, że jeżeli $a \neq 0$, $a \neq 1$ jest liczbą algebraiczną, b zaś jest liczbą algebraiczną i niewymierną, to liczba a^b jest przestępna.

Dowód został podany dopiero w 1934 roku (niezależnie) przez A.O. Gelfonda oraz T. Schneidera. W szczególności wynika stąd, że $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą przestępną, a więc również niewymierną. Mimo iż wydaje się, że problem Hilberta dotyczy liczb bardzo szczególnej postaci, to jednak ma on daleko nieoczywiste konsekwencje, bowiem wynika z niego, między innymi, następujący fakt:

Jeśli w trójkącie równoramiennym stosunek kąta przy podstawie do kąta przy wierzchołku jest liczbą algebraiczną niewymierną, to stosunek długości podstawy do długości ramienia jest liczbą przestępną.

Z rozwiązania wspomnianego problemu Hilberta wynika również, że wszystkie wartości logarytmów, których przybliżenia możemy znaleźć w tablicach, są albo wymierne, albo przestępne.

Opracował P.H.

Liczby Liouville'a to liczby postaci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}},$$

gdzie c_i są dowolnie wybieranymi cyframi różnymi od zera.

Dowód, że są one przestępne, jest bardzo podobny do dowodu przestępności liczby

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i!}}$$

zamieszczonego w *Delcie* 1/1993.

Ciekawostka:
Liczba 0,12345678910111213..., w której po przecinku występują jedna za drugą kolejne liczby naturalne, jest przestępna (Kurt Mahler). Czytelnikom pozostawiamy jako nietrudne ćwiczenie dowód, że powyższa liczba jest niewymierna (bezpośrednio, bez korzystania z faktu, że jest przestępna).

Wykres ten został sporządzony na podstawie rozważanego do tej pory przybliżonego geometrycznego modelu porowatości. Jest więc także przybliżony. Użyte wartości paramatrów są następujące: porowatość $\psi = 0{,}5$, promień porów $r = 10^{-4}$ m, masa molowa H_2O wynosi $\mu = 0{,}018$ kg/mol, a stała gazowa R = 8,314 J/K·mol. Przewodnictwo cieplne nieporowatego lodu jest funkcją temperàtury. Została przyjęta typowa dla dielektryków zależność typu $\kappa \sim \frac{1}{T}$:

$$\kappa_l = 567/T \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\ K\ s}}\right],$$

ze współczynnikiem proporcjonalności wyznaczonym doświadczalnie.

Omówiony sposób obliczania przewodnictwa cieplnego porowatego lodu można zastosować do jądra komety i obliczyć szybkość przenikania ciepła w głąb jądra. Okaże się wówczas, że w przypadku niektórych komet stwardniała skorupa zlepionych ziarenek lodu grubieje na tyle szybko, że pobranie próbki z powierzchni jądra może być trudne i wymagać zastosowania nietypowych metod.

Na koniec warto zastanowić się, w jaki sposób przewodnictwo cieplne porowatego lodu zmieni się po wprowadzeniu do porów powietrza (gazu innego niż para). W najbardziej interesującym przypadku, czyli na Ziemi, ciśnienie pary w porach jest małe w porównaniu z ciśnieniem powietrza. Z tego względu decydującym czynnikiem ograniczającym szybkość przepływu pary jest nie rozmiar porów, ale zderzenia z cząsteczkami powietrza. W konsekwencji przewodnictwo cieplne porów jest znacznie mniejsze i nie należy się spodziewać, aby porowaty lód miał większe przewodnictwo niż nieporowaty.