Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 275 (WT=2,57) i 276 (WT=2,38) z numeru 2/1994

Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	42,43
Paweł Lizak	– Puławy	41,71
Waldemar Pompe	– Warszawa	38,83
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	38,31

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1995

Zadania z matematyki nr 289, 290

Redaguje Marcin E. KUCZMA

289. W pewnej grupie ludzi żadna para osób znających się wzajemnie nie ma żadnego wspólnego znajomego, natomiast każda para osób nie znających się wzajemnie ma dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Dowieść, że każda osoba w tej grupie ma tyle samo znajomych. (Zakładamy, że jeśli jedna osoba zna drugą, to druga zna pierwszą, oraz że nikt nie zalicza siebie samego do grona swoich znajomych.)

290. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n). Określamy ciąg (b_n) wzorem

$$b_n = \left(\frac{1+a_n}{a_{n-1}}\right)^n .$$

Wykazać, że ciąg (b_n) nie może być zbieżny do granicy mniejszej od e.

Zadanie **290** zaproponował pan Adam Czornik z Bytomia.

Zadania z fizyki nr 187, 188

Redaguje Jerzy B. BROJAN

187. W jednostce objętości powietrza znajdowało się n_A jonów A^+, n_B jonów B^+, n_X jonów X^- i n_Y jonów Y^-. Jeśli od pewnej chwili początkowej następowała tylko rekombinacja jonów (nie zaś jonizacja), a współczynniki rekombinacji są jednakowe dla każdej pary jonów, to ile przybyło w jednostce objętości po długim czasie cząsteczek AX, ile – cząsteczek AY, ile BX, a ile BY?
Wskazówka: Liczba par jonów ulegających rekombinacji w jednostce czasu jest proporcjonalna do iloczynu koncentracji jonów dodatnich i ujemnych danego rodzaju, a stała proporcjonalności nazywa się współczynnikiem rekombinacji.

188. Precyzyjny woltomierz wielozakresowy (nie elektroniczny) dołączono do dwóch punktów A i B pewnego obwodu liniowego (tzn. składającego się ze źródeł napięcia i oporników stosujących się do prawa Ohma). Gdy woltomierz był nastawiony na zakres 10 V, wskazywał 8,92 V, a gdy przestawiono go na zakres 30 V, jego wskazanie wzrosło do 9,04 V. Jakie napięcie występowało między A i B przed dołączeniem woltomierza?

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 177 (WT=4,00) i 178 (WT=1,96) z numeru 4/1994

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	37,44
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	32,85
Aleksander Surma	– Myszków	20,52

Rozwiązanie zadania M 720. Oznaczmy $f(x)=2^x$, $g(x)=f\left(x+\frac{1}{x}\right)-f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)$ dla $x \geq 1$. Wówczas

$$g'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)f'\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)-f'(x) \geq f'\left(\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\right)-f'(x)=f'(x)-f'(x)=0 .$$

Powyższa nierówność wynika stąd, że $f'(x)=2^x \ln 2$ jest funkcją wypukłą. Zatem

$$2^{x+1/x}-2^x-2^{1/x}=g(x) \geq g(1)=0$$

dla $x \geq 1$, stąd dzieląc obie strony nierówności przez $2^{x+1/x}$ otrzymamy

$$2^{-x}+2^{-1/x} \leq 1$$

dla $x \geq 1$. Ponieważ lewa strona ostatniej nierówności nie zmieni się, gdy zamiast x wstawimy $\frac{1}{x}$, nierówność jest prawdziwa także gdy $0 < x < 1$.