Niemiecka Olimpiada Matematyczna

Zawody olimpiady matematycznej w Niemczech (będące kontynuacją zawodów w RFN) odbywają się od 1970 roku. Na początku każdego roku kalendarzowego rozsyłane są do szkół druki z zadaniami pierwszego etapu. Uczniowie zainteresowani zawodami przesyłają rozwiązania zadań do komitetów okręgowych odpowiadających poszczególnym landom. W kwietniu najlepsi z nich zostają zakwalifikowani do drugiego etapu i otrzymują kolejne cztery zadania do rozwiązania – już nieco trudniejsze. Spośród najlepszych uczestników drugiego etapu wybierana jest niewielka grupka finalistów. Finał to egzamin ustny przed niemieckimi profesorami matematyki. Na podstawie tych rozmów zostaje wybrana sześcioosobowa drużyna na międzynarodową olimpiadę matematyczną.

Na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Turcji w 1993 roku drużyna Niemiec zajęła drugie miejsce (4 złote i 2 srebrne medale) za niepokonaną już od wielu lat drużyną Chin (6 złotych medali). Proponujemy więc Czytelnikom przygotowującym się do zawodów Olimpiady Matematycznej, aby stawili czoło zadaniom, które rozwiązywali najlepsi (nie licząc Chin). Czytelnikom życzymy miłej zabawy!

I etap – styczeń 1993

1. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ oznaczmy przez m taką największą liczbę naturalną, że $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$, gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_m$ są różnymi liczbami naturalnymi. Wyrazić m jako funkcję zmiennej n.

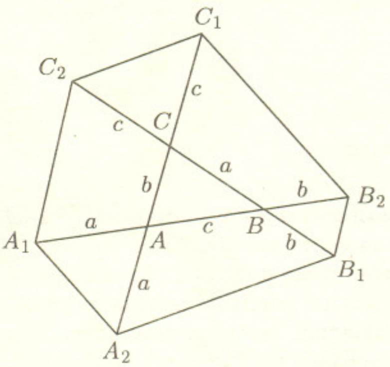
2. Skończony zbiór M punktów płaszczyzny ma następującą własność: dla dowolnych dwóch punktów $A, B \in M$ istnieje taki punkt $C \in M$, że trójkąt ABC jest równoboczny. Znaleźć zbiór M o największej liczbie elementów mający ową własność.

3. Istnieją pary liczb kwadratowych (kwadraty liczb naturalnych) o następujących własnościach:

– ich rozwinięcia dziesiętne mają tę samą liczbę cyfr (zakładamy tu, że pierwsza cyfra rozwinięcia jest różna od zera),
– gdy napiszemy te liczby jedna za drugą, to otrzymamy nową liczbę kwadratową.

Przykład: $16 = 4^2$ i $81 = 9^2$, $1681 = 41^2$.

Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich par.



4. Dany jest trójkąt ABC o polu F. Konstruujemy sześciokąt wypukły o wierzchołkach $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. Oznaczmy jego pole przez G tak, jak pokazano na rysunku. Wykazać, że $G \geq 13F$.

II etap – kwiecień 1993

1. Każdy wierzchołek dziewięciokąta foremnego malujemy na zielono lub czerwono. Udowodnić, że istnieją dwa przystające trójkąty (o wierzchołkach wybranych spośród wierzchołków dziewięciokąta), z których każdy ma wszystkie wierzchołki jednakowego koloru.

2. O liczbie rzeczywistej a wiemy, że istnieje dokładnie jeden kwadrat, którego wierzchołki leżą na krzywej $y = x^3 + ax$. Znaleźć długość boku tego kwadratu.

3. Dany jest trójkąt ABC. A' jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta A i symetralnej boku AB, B' jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta B i symetralnej boku BC, C' jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta C i symetralnej boku CA. Udowodnić, że trójkąt ABC jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy $A' = B'$. Jeżeli punkty A', B', C' są różne, to wykazać, że $|\angle B'A'C'| = 90° - |\angle BAC|/2$.

4. Czy istnieje taka liczba naturalna n, że $n!$ w systemie dziesiętnym zaczyna się od układu cyfr 1993?

Krzysztof CHEŁMIŃSKI, Waldemar POMPE