Historia pewnego zadania

Na radzieckiej Olimpiadzie Matematycznej w 1968 roku w Kijowie pojawiło się ciekawe i dość trudne

Zadanie. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

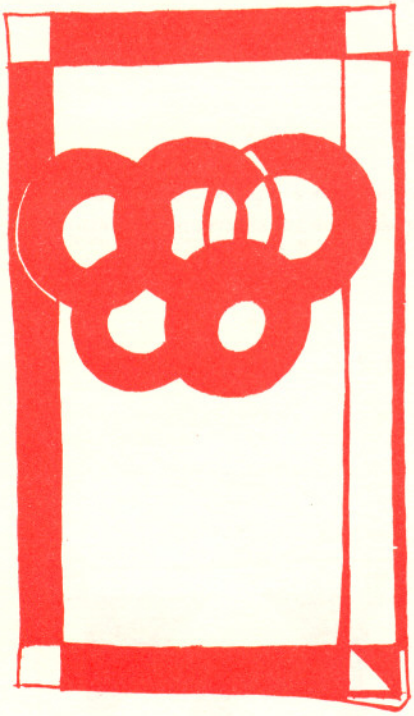
(1) $$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geq \frac{n}{4}.$$

Porównaj też z *Kącikiem Olimpijskim* w *Delcie* 5/1994.

Rozwiązanie jest dość krótkie. Pomysł polega na tym, by szacować lewą stronę z dołu odrzucając ułamki o niewielkich licznikach; oto szczegóły.

Wybierzmy tak numer i_1, aby $x_{i_1} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$. Otóż x_{i_1} jest licznikiem jednego z ułamków. W mianowniku tego ułamka są dwa składniki. Większy z nich oznaczmy przez x_{i_2}. Dalej, niech x_{i_3} będzie większą z dwóch liczb stojących w mianowniku ułamka o liczniku x_{i_2} itd. – ogólnie, x_{i_l} oznacza większą z dwóch liczb stojących w mianowniku ułamka o liczniku $x_{i_{l-1}}$. Przy tych oznaczeniach

$$\frac{x_{i_l}}{x_{i_l+1} + x_{i_l+2}} \geq \frac{x_{i_l}}{2x_{i_{l+1}}}, \quad l = 1, 2, \ldots$$



Zauważmy, że liczby x_{i_l} oraz $x_{i_{l+1}}$ występują we wzorze (1) w licznikach ułamków bądź to sąsiednich, bądź oddzielonych dokładnie jednym ułamkiem (przyjmijmy, że ułamki pierwszy i ostatni też są sąsiednie). Ponieważ x_{i_1} występuje w mianownikach dwóch sąsiednich składników naszej sumy oraz jest największą ze wszystkich liczb x_i, więc dla pewnego k mamy $x_{i_{k+1}} = x_{i_1}$. Jak już powiedzieliśmy, przechodząc od ułamka z licznikiem x_{i_l} do tego z licznikiem $x_{i_{l+1}}$ przeskakujemy o jeden lub o dwa składniki. Aby dojść od x_{i_1} do $x_{i_{k+1}} = x_{i_1}$, musimy wykonać „pętlę” długości n; skąd $k \geq n/2$.

Oszacujmy teraz naszą sumę S z dołu, wybierając jedynie składniki o licznikach $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. Posługując się nierównością o średniej arytmetycznej i geometrycznej, otrzymamy tezę:

$$S \geq \frac{x_{i_1}}{2x_{i_2}} + \frac{x_{i_2}}{2x_{i_3}} + \ldots + \frac{x_{i_k}}{2x_{i_1}} \geq k \cdot \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} \geq \frac{n}{4}.$$

To jednak nie koniec historii. Zauważmy, że w naszym dowodzie czasami zapominamy o niektórych składnikach w sumie S – może się nawet zdarzyć tak, że zapominamy o co drugim składniku. Zapewne więc udowodnione przez nas oszacowanie nie jest najlepsze z możliwych.

W 1954 roku amerykański matematyk H.S. Shapiro wysunął hipotezę, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ i dla dowolnych dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność mocniejsza od (1): z lewą stroną nie zmienioną, i $n/2$ zamiast $n/4$ po prawej stronie. Udowodniono jednak, że przypuszczenie Shapiro nie jest prawdą dla parzystych $n \geq 14$ oraz dla nieparzystych $n \geq 27$.

Ostrą wersję nierówności (1) zdołał udowodnić wkrótce po zakończeniu kijowskiej olimpiady jeden z jej zwycięzców, W.G. Drinfeld, późniejszy (1990) laureat medalu Fieldsa.

Medal Fieldsa jest w świecie matematyków odpowiednikiem Nagrody Nobla (matematyki nie uznał Nobel za działalność służącą ludzkości); przyznaje się go raz na cztery lata, podczas kolejnych międzynarodowych Kongresów Matematycznych. Żaden Polak nie był jeszcze laureatem medalu Fieldsa.

Okazuje się, że dla $n \in \mathbf{N}$ oraz dodatnich x_i, $1 \leq i \leq n$, mamy zawsze

(2) $$S(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geq \gamma \cdot \frac{n}{2}.$$

Liczba $\gamma \approx 0{,}989\ldots$ jest rzędną punktu, w którym wspólna styczna do wykresów funkcji $y = \exp(-x)$ oraz $y = 2/(\exp(x/2) + \exp(x))$ przecina oś OY. Oszacowania (2) nie można poprawić: jeśli $\gamma_1 > \gamma$, to istnieje takie n i liczby dodatnie x_i, że $S(x_1, \ldots, x_n) < \gamma_1 \cdot n/2$. Ten wynik był treścią jednej z pierwszych publikacji naukowych Drinfelda.

Historyjka wydaje się mieć dwa morały. Po pierwsze, przed uczestnikami Olimpiady Matematycznej otwiera się ścieżka do świata trudnej nauki, w którym jest miejsce nawet na medal Fieldsa. Po drugie, elementarne zadania z pozornie prostymi rozwiązaniami mogą być źródłem ciekawych uogólnień, interesujących nawet dla wielkich matematyków.

Paweł STRZELECKI