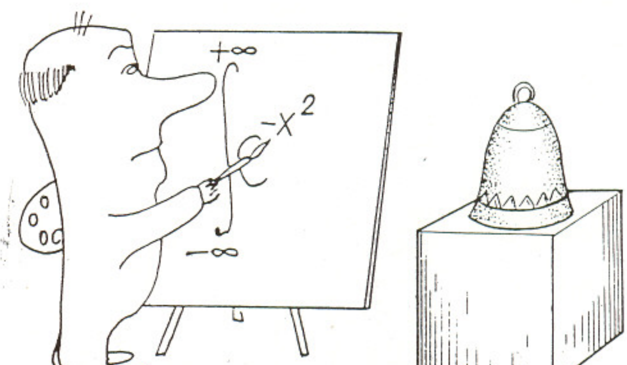
epsilon
10/94
(44)

W pierwszych czterech tegorocznych *EPSILONACH* umieściliśmy rysunki (cztery spośród prawie dwustu) z książki K. Ciesielskiego i Z. Pogody *Bezmiar matematycznej wyobraźni* wraz z adnotacją, że na początku 1994 roku (czyli właśnie w czasie, gdy odpowiednie *Delty* się ukazywały) książka będzie do nabycia w księgarniach. Napłynęły do nas reklamacje Czytelników, że w księgarniach o takiej książce nie słyszano. I to prawda – jesteśmy winni przeprosiny, ale to nie nasza wina. Więc małe wyjaśnienia.

Książka *Bezmiar matematycznej wyobraźni* była w planie wydawniczym na 1993 rok (złożona została w wydawnictwie w styczniu 1991 roku, ale nie były to wspomnienia sekretarza KW PZPR pt. *Nie kradłem więcej niż inni* czy coś w tym rodzaju, więc musiała swoje odczekać). Przewidując pewien poślizg, sądziliśmy, że do księgarni dotrze na początku roku 1994. Niestety – opóźnienie okazało się istotnie większe, a *EPSILONY* przygotowywane są do druku z kilkumiesięcznym wyprzedzeniem, nie mogliśmy więc notki zmienić. Zgodnie z obecnymi (wiosna 1994) informacjami z Wydawnictwa, ma ona być w księgarniach jesienią 1994 roku – mniej więcej wtedy, gdy ukaże się ten, 10/1994 numer *Delty*. Mamy nadzieję, że tym razem okaże się to prawdą. A książkę (konsekwentnie) gorąco polecamy.

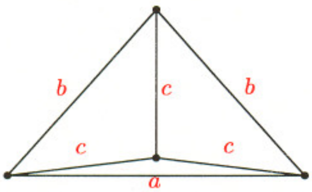
(A.P.)



Rysunek z książki *Bezmiar matematycznej wyobraźni*

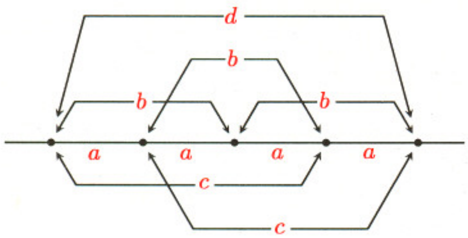
Odległości

Trzy wierzchołki trójkąta równoramiennego, ale nie równobocznego, mają tę własność, że jeśli rozważymy odległości między nimi, to jedna wartość jest przyjęta raz, a druga dwa razy. Podobnie banalną jest inna obserwacja: gdy do tych wierzchołków dołączymy środek okręgu opisanego na trójkącie, to wśród wzajemnych odległości jedna jest przyjmowana raz, druga dwa razy, trzecia trzy – chyba że akurat ktoś pechowo wybrał trójkąt, w którym miara kąta między równymi ramionami wynosi 30° (czemu wtedy jest inaczej?). Te prościutkie fakty prowadzą jednak do oryginalnego uogólnienia...



Zauważmy: jeżeli mamy na płaszczyźnie n punktów, to po połączeniu ich w pary otrzymamy $\binom{n}{2}$ układów dwupunktowych – i tym samym tyle też możliwych teoretycznie odległości. Ale przecież niektóre odległości mogą się powtórzyć... Wiemy, że $\binom{n}{2} = 1 + 2 + \ldots + (n-1)$ – to już szybko prowadzi do pytania o naturalne uogólnienie naszych początkowych obserwacji. Czy można umieścić na płaszczyźnie n punktów tak, by przyjmowanych odległości między nimi było dokładnie $n-1$, przy czym jedna osiągnięta raz, druga dwa razy... $(n-1)$-sza $n-1$ razy?

Znalezienie takiej konfiguracji nie jest specjalnie trudne. Wystarczy tak położyć n punktów na jednej prostej, by dwa sąsiednie były zawsze w tej samej odległości.



Wobec tego utrudnijmy sobie zadanie, wyrzucając specyficzne przypadki. Załóżmy zatem, że wśród n punktów żadne trzy nie są współliniowe i żadne cztery nie leżą na jednym okręgu (skąd ten drugi warunek?).

Dla n równego 3 i 4 zadanie jest niezwykle proste – właśnie je rozwiązaliśmy. Ale już dla n równego 5 trochę trudniej wskazać odpowiednie punkty.

Ogólny problem wcale nie jest taki stary. Postawił go w roku 1982 znakomity matematyk, Paul Erdös. Ale, co ciekawe – jeszcze niedawno zagadka nie była rozwiązana i nic nam nie wiadomo o tym, aby ją ktoś ostatnio rozstrzygnął.

Do roku 1991 znano konstrukcje odpowiedniego układu punktów dla n równych 3, 4, 5, 6, 7, 8. Już dla liczby dziewięć nie wiadomo było, co z tym fantem zrobić. Erdös oferował nagrody! Za dowód nieistnienia takiego układu w ogólnym przypadku oferował 50 dolarów, za konstrukcję dla dowolnego n natomiast 500 dolarów. Erdös był przekonany, iż istnieje takie k, że dla $n > k$ problem nie ma rozwiązania.

Oto odpowiedź dla n równego 8, podana przez Ilonę Palásti w 1989 roku. Owe punkty (zapisane we współrzędnych kartezjańskich) to: $(0, 2)$, $(\sqrt{3}, 7)$, $(2\sqrt{3}, 0)$, $(2\sqrt{3}, 4)$, $(3\sqrt{3}, 7)$, $(3\sqrt{3}, 9)$, $(4\sqrt{3}, 0)$, $(5\sqrt{3}, 5)$. Każdy może we własnym zakresie sprawdzić, że odległości 2, $2\sqrt{19}$, $2\sqrt{21}$, $2\sqrt{3}$, 4, $2\sqrt{7}$ i $2\sqrt{13}$ są przyjmowane odpowiednią liczbę razy.

A poza tym można rozważać analogiczny problem w przestrzeni trójwymiarowej, chyba również wciąż otwarty.

Krzysztof CIESIELSKI

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.