Dowody niewymierności pewnych liczb

Robert HAJŁASZ

Znane jest twierdzenie:

Jeśli równanie stopnia n-tego o współczynnikach całkowitych i współczynniku przy najwyższej potędze równym 1 ma pierwiastek wymierny, to jest on całkowity.

Z twierdzenia tego skorzystamy niżej przy dowodzeniu niewymierności pewnych liczb.

I. *Wykazać, że* $\sqrt[11]{13}$ *jest liczbą niewymierną.*

Dowód.
Rozważmy równanie
$$x^{11} - 13 = 0\,.$$
Liczba $\sqrt[11]{13}$ jest rozwiązaniem tego równania. Przypuśćmy, że jest ona wymierna. Wówczas, z uwagi na to, że równanie ma współczynniki całkowite i współczynnik przy najwyższej potędze równy 1, otrzymujemy, że liczba $\sqrt[11]{13}$ jest całkowita. A przecież nią nie jest. Sprzeczność.

Uwaga. W ten sam sposób dowodzimy, że niewymiernymi są liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[17]{19}$, $\sqrt[111]{307}$, itp.

Podamy jeszcze jeden dowód faktu, że
$$\sqrt{2} \textit{ jest liczbą niewymierną.}$$

(Dowód pochodzi od matematyka angielskiego T. Estermanna.)

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Wówczas istnieje najmniejsza liczba naturalna – oznaczmy ją przez n – taka, że
$$n\sqrt{2} \text{ jest liczbą naturalną.}$$

Rozważmy teraz liczbę $n\sqrt{2} - n$. Otrzymujemy, że
1) $n\sqrt{2} - n$ jest liczbą naturalną,
2) $n\sqrt{2} - n < n$ (bo $n\sqrt{2} < 2n$),
3) $(n\sqrt{2} - n)\sqrt{2}$ jest liczbą naturalną (bo $2n - n\sqrt{2}$ jest liczbą naturalną).

Otrzymaliśmy sprzeczność, bo znaleźliśmy liczbę $n\sqrt{2} - n$, która jest naturalna, mniejsza od n i taka, że $(n\sqrt{2} - n)\sqrt{2}$ jest liczbą naturalną.

II. *Wykazać, że*
$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$$
jest liczbą niewymierną.

Dowód.
Przypuśćmy, że liczba ta jest wymierna. Wówczas podnosząc ją do kwadratu i odejmując 2 – odpowiednią liczbę razy – otrzymujemy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Sprzeczność.

III. *Wykazać, że* $\operatorname{tg} 1^\circ$ *jest liczbą niewymierną.*

Dowód.
Przypuśćmy, że $\operatorname{tg} 1^\circ$ jest liczbą wymierną. Wówczas wymierne są też liczby

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (X)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Tomasz HOFMOKL

Czy umiecie się dziwić?

W poprzednich dziewięciu pogadankach omawiałem zjawiska, których wynik zdaje się przeczyć naszemu poczuciu tego, co możliwe i dlatego skłonni jesteśmy je uznać za przeczące zdrowemu rozsądkowi. Zjawisk takich jest bardzo wiele i długo jeszcze można by gawędzić na ten temat. Kiedy jednak przychodzi pora zakończyć nasze spotkania, powstaje problem, jaki temat najbardziej by się do tego nadawał.

Zdecydowałem, że dobrze nadaje się do tego wskazanie, jak cenną cechą jest umiejętność dziwienia się. Mamy ją wszyscy we wczesnym dzieciństwie. Zadręczamy rodziców pytaniami *a co to? a po co to? a dlaczego?* Nie zawsze nawet wysłuchamy odpowiedzi, a już gotowe jest następne pytanie. Z wiekiem tę zdolność dziwienia się stopniowo zatracamy, wszystko powszednieje i nie potrafimy już ujrzeć za zasłoną powszedniości zaskakujących problemów. Na szczęście nie wszyscy tracą zdolność dziwienia się i z nich wyrastają prawdziwi badacze.

Nie jest trudno zostać prawdziwym badaczem, bo rzeczy niezwykłych dzieje się wokół wiele. Aby się jednak czymś zdziwić, trzeba na ten temat mieć pewne podstawowe wiadomości. Jeżeli dziwię się (na przykład), że moja znajoma z dnia na dzień stała się platynową blondynką, to znaczy, że miałem informację o jej dotychczas kruczoczarnych włosach i dziwię się, jaki to fenomen przyrody lub może, bardziej się ograniczając, chemii, może być za to zjawisko odpowiedzialny. Niedobrze jest, jeżeli zarejestruję obie informacje: wczoraj ciemna, dziś blondynka i nie wywoła to żadnej reakcji.

Może, oczywiście, oznaczać to, że zjawisko zmiany koloru włosów jest dla mnie aż nadto dobrze znane. Wtedy, istotnie, nie ma czemu się dziwić. Może jednak być i tak, że nie dziwię się, bo mnie to nic nie obchodzi – i to jest objaw niepokojący. Oznacza to, że jestem nastawiony na rejestrowanie faktów, bo same pchają się przed oczy, ale nie interesuje mnie pytanie ani *dlaczego?*, ani *w jaki sposób?*. Jest to duże kalectwo intelektualne i stąd pytanie, czy Państwo nie są nim dotknięci, **czy umieją się Państwo dziwić?**

Po tym wprowadzeniu rozejrzyjmy się dookoła. Na pomoc przywołamy tylko szkolną wiedzę z fizyki.

Obserwacja pierwsza: stoję na Ziemi, ciężko mi od niej się oderwać, co najwyżej mogę podskoczyć. Wiem, że to Ziemia przyciąga mnie grawitacyjnie. Dlaczego jednak nie odczuwam żadnego przyciągania ze strony innych obiektów materialnych?

Zapytany o to fizyk odpowie, że takie przyciąganie, oczywiście, istnieje, ale jest niesłychanie słabe. Jeżeli cała ogromna Ziemia przyciąga mnie (a ja ją) z siłą odpowiadającą mojemu ciężarowi, to zwykły budynek wielekroć lżejszy od Ziemi może to uczynić z tylekroć mniejszą siłą.

Możemy zadowolić się tą odpowiedzią i wtedy kończy się nasze zdziwienie, ale możemy być nieco bardziej dociekliwi i natychmiast wymyślić następny problem. Wiemy przecież, że jesteśmy zbudowani z atomów, a te zawierają elektrycznie naładowane dodatnie jądra i ujemne elektrony. Czy ładunki elektryczne, jakie są we mnie, dokładnie się równoważą?

Prosty rachunek, dostępny dla ucznia w szkole, może wykazać, że gdyby atomy nie były doskonale obojętne elektrycznie, to oddziaływalibyśmy na siebie ogromnymi siłami. Wyobraźmy sobie dla przykładu, że Panie mają nadmiar ładunków dodatnich, a Panowie nadmiar ładunków ujemnych. Załóżmy dalej, że ten nadmiar lub niedomiar jest znikomo mały, na przykład niech tylko jedna stumilionowa część ładunku protonów u Pań, a elektronów u Panów, będzie niezobojętniona. Czy wyobrażają sobie Państwo, co by się wówczas działo? Otóż siła przyciagania płci przeciwnych z odległości jednego metra byłaby rzędu milionów milionów niutonów. Z tą samą siłą odpychałyby się wzajemnie Panie, jak również Panowie. To, że możemy w miarę spokojnie (na ogół) przechodzić obok siebie nie ulegając zmiażdżeniu ani odrzuceniu (choć, oczywiście, pewien pociąg lub abominację możemy wyraźnie odczuwać), świadczy o idealnym niemal zrównoważeniu ładunków elektronów i protonów w materii naszego organizmu. Czy to nas dziwi?

Jeżeli nie, to trudno, ale warto jednak snuć dalej te rozważania i dalej się dziwić.

$$\operatorname{tg} 2^\circ = \frac{2\operatorname{tg} 1^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 1^\circ},$$
$$\operatorname{tg} 3^\circ = \operatorname{tg}(1^\circ+2^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ}{1-\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ},$$
$$\operatorname{tg} 4^\circ = \operatorname{tg}(1^\circ+3^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 3^\circ}{1-\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 3^\circ},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg}(1^\circ+29^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 29^\circ}{1-\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 29^\circ}.$$

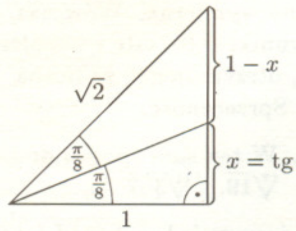
Otrzymaliśmy, że $\operatorname{tg} 30^\circ$, czyli $\sqrt{3}/3$ jest liczbą wymierną. Sprzeczność.

IV. *Wykazać, że $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ jest liczbą niewymierną.*

Dowód.
I sposób. Korzystamy z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta.
W trójkącie dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do boków przyległych.

W naszym przypadku

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{\sqrt{2}},$$
$$x\sqrt{2} = 1-x,$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1.$$



A więc x, czyli $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ jest liczbą niewymierną.

II sposób.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$$
$$1 = \frac{2a}{1-a^2} \quad \left(a = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$$
$$(*) \qquad a^2+2a-1=0$$
$$a_1 = \sqrt{2}-1 \ - \ \text{liczba niewymierna}.$$

(Można i tak: Liczba a jest pierwiastkiem równania $v^2+2v-1=0$ (patrz $(*)$). Gdyby liczba a była wymierna, to z uwagi na to, że równanie ma współczynniki całkowite i współczynnik przy najwyższej potędze równy 1, otrzymalibyśmy, że a jest liczbą całkowitą. Że nie jest, widać to wyraźnie na rysunku (sposób I). Tam jest to część jedynki, więc nie jest liczbą całkowitą.)

Rozwiążemy teraz zadanie znane już Czytelnikom *Delty*.

V. *Czy istnieją takie dwie liczby niewymierne a i b, że a^b jest liczbą wymierną?*

Rozwiązanie.
I sposób. Rozważmy liczbę $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Liczba ta jest albo wymierna, albo niewymierna. Jeśli jest wymierna, to odpowiedź jest twierdząca w sposób oczywisty. Jeśli jest niewymierna, to tę niewymierną podnosimy do niewymiernej $\sqrt{2}$ i otrzymujemy

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

a więc otrzymujemy liczbę wymierną.
Odpowiedź: Tak.

Uwaga. Można udowodnić, że $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną. Napiszemy o tym w artykule „O liczbach przestępnych” w *Delcie* 11/1994.

II sposób. $\sqrt{2}^{\lg_{\sqrt{2}} 3} = 3$. Pozostaje wykazać, że $\lg_{\sqrt{2}} 3$ jest liczbą niewymierną. Przypuśćmy, że $\lg_{\sqrt{2}} 3$ jest liczbą wymierną, czyli że

$$\lg_{\sqrt{2}} 3 = \frac{m}{n}\,,$$

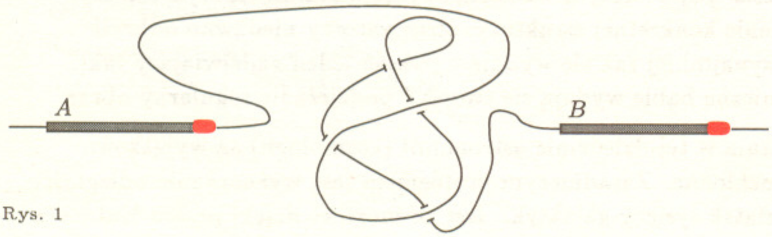
gdzie m i n są pewnymi liczbami naturalnymi (wolno napisać, że naturalnymi, bo $\lg_{\sqrt{2}} 3 > 0$). Stąd

$$(\sqrt{2})^{m/n} = 3\,,$$
$$\sqrt{2}^{m} = 3^n\,,$$
$$2^m = 9^n\,.$$

Lewa strona dzieli się przez 2, prawa zaś nie. Sprzeczność.

Jak to rozwiązać?

Mamy prostą. Usuńmy z niej pewien odcinek i zamiast niego „wklejmy” krzywą, tak jak na rysunku 1.



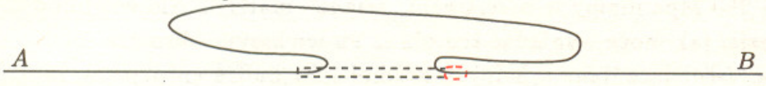
Rys. 1

Problem jest następujący:
Czy po każdej takiej krzywej da się przejechać zapałką z lewej półprostej (położenie A) na prawą (położenie B) w taki sposób, aby cały czas oba końce zapałki dotykały linii?

Ponieważ nie jest jasne, jak matematycznie zdefiniować krzywą, więc proponuję przyjąć, że obie półproste A i B są połączone nie krzywą, lecz łamaną.

Proponuję też najpierw porobić trochę doświadczeń z różnymi krzywymi. Czytelnik przekona się, jak czasami skomplikowane ruchy zmuszona jest wykonywać zapałka, nim przejdzie od A do B. Ale czy zawsze to się jej uda?

Jeżeli zapałka znajduje się w takim położeniu, jak na rysunku 2, to na pewno nie przejdzie ona na półprostą B. To jednak nie jest kontrprzykład, bo gdybyśmy wystartowali z położenia A, to bez przeszkód dojdziemy do B. Po prostu ruszając z A zapałka nigdy nie wpadnie w taką pułapkę, jaka jest przedstawiona na rysunku 2.



Rys. 2

Czekamy na listy. Autorom najciekawszych dowodów bądź kontrprzykładów wyślemy nagrody książkowe.

Piotr HAJŁASZ

Przecież takie idealne prawie zrównoważenie świadczy, że ładunek elektryczny nie zależy od jego ruchu. Elektrony są znacznie bardziej ruchliwe od protonów, a jednak mają w materii dokładnie ten sam ładunek co do wartości, a różniący się tylko znakiem. Co w tym dziwnego? Choćby to, że wiemy skądinąd, iż masa zależy od prędkości ciała. Czy nie zaskakuje nas, że ładunek nie wykazuje tej zależności?

Kojarząc niezależność ładunku od jego prędkości i stwierdzenia szczególnej teorii względności można wywnioskować, że powinno istnieć pole magnetyczne (faktycznie odkryto je wcześniej niż teorię względności, ale możemy spróbować zrobić to na nowo po jej odkryciu). Wiedząc zaś o polu magnetycznym przewodnika z prądem możemy (na nowo) zaprojektować silnik elektryczny. Ten ciąg wnioskowania można ciągnąć jeszcze daleko. Wybrałem go dla wykazania, że wnikliwe zastanowienie się, dlaczego nie odczuwam żadnego pociągu do znajomej Pani (a w każdym razie nie mierzony w milionach milionów niutonów), może doprowadzić – przy odpowiedniej zdolności wnioskowania – do odkrycia zasady działania silnika elektrycznego.

Przedstawione rozumowanie było rozumowaniem naukowym. Wyciągaliśmy wnioski ze znanych faktów doświadczalnych i nie postulowaliśmy niczego, czego nie można by sprawdzić doświadczalnie. Nie zawsze jednak tak być musi.

Na sam koniec zatrzymam się na koncepcjach, które wykraczają poza ściśle naukowe wnioskowanie. Obserwacja, którą proponuję wykonać, jest zaskakująco prosta. Proszę spróbować stwierdzić, że Pan czy Pani istnieje. Czy to zamierzenie wydaje się być pozbawione sensu?

Znane jest powiedzenie „myślę, więc jestem”. Jest to jakieś rozwiązanie sprawy. Możemy sprawdzić to w jeszcze prostszy sposób nie nadwerężając naszych władz umysłowych. Można się po prostu uszczypnąć. Jeżeli Państwo nie zasnęli nad lekturą tego tekstu, to i tę obserwację świadczącą o własnym istnieniu wykonają Państwo bez trudności. A teraz pytanie, czy ta obserwacja coś nam daje. Oczywiście, tak.

Skoro stwierdziliśmy, że istniejemy, nasuwa się od razu szereg pytań filozoficznych o to, skąd wziął się człowiek, o jego świadomość, myśli, o jego duszę.