Księga Szkocka

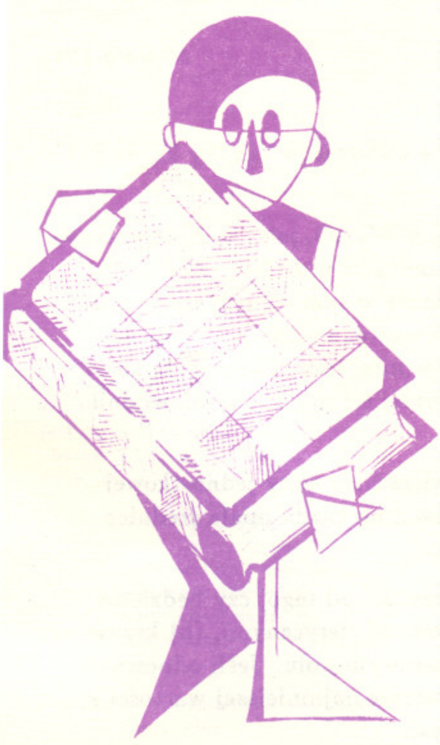
Marek KORDOS

Trochę irytuje częste ostatnio potrząsanie szabelką w rytm hymnu narodowego obiecującego, że jednak *szablą odbierzemy* i nadmierne rozczulanie się nad utraconymi kresami – Moskwę też w końcu, jako jedyni po Wikingach i Tatarach, okupowaliśmy przez jakiś czas (i to dwukrotnie). Nawet fakt, że – powiedzmy – Białynicki (albo Mickiewicz) urodził się w Nowogródku, a Kuroń (albo Hemar) we Lwowie, nie wydaje się wystarczający, by bardziej widzieć Polskę tam niż tutaj. Ale zrozumieć taką reakcję można, gdy zwróci się uwagę na pewne niemożności, jakie sobie zafundowaliśmy w *minionym okresie*, a których teraz – będąc już zacofanym krajem kapitalistycznym – nie nadrobimy. Własna przemoc w tej sprawie wzięła nam w szczególności *Księgę Szkocką*.

Matematycy pracują w specyficzny sposób i – często – potrzebują do tego specyficznych warunków. Jednym z takich warunków jest lokal w znacznym stopniu publiczny, a w dodatku zaopatrzony w różnego rodzaju napoje – słowem coś, co z pewną dowolnością można nazwać kawiarnią. Lwowską szkołę matematyczną lat tzw. międzywojennych stworzyły dwa, położone tuż obok siebie, takie lokale *Café Szkocka* i *Café Roma*. Dla potomności przetrwa jednak tylko pierwsza z nich, a to dzięki trafnej inwestycji właściciela. Inwestycją tą był gruby, starannie oprawiony (i niemniej starannie „przycumowany") zeszyt, w którym panowie matematycy mogli zapisywać swoje cenne pomysły, niszcząc tym sposobem mniej bibułkowych serwetek. Panom matematykom pomysł się spodobał i w ten sposób powstało unikalne dzieło – zbiór ponad 193 przypadkowych problemów matematycznych, powstałych w ramach czegoś w rodzaju życia towarzyskiego. Godne uwagi jest, że problemy te, jak też odpowiedzi czy uwagi, pisane są w różnych językach (np. angielski, rosyjski), w takich, w jakich ich autorom przyszły do głowy. Problemom towarzyszy czasem obietnica nagrody za ich rozwiązanie (np. 5 małych piw albo żywa gęś) – nagrody takie były zawsze zresztą wypłacane.

Wydaje się, że w zeszyt zainwestował nie restaurator osobiście, ale żona Banacha (por. Hugo Steinhaus, *Wspomnienia i zapiski*, Wyd. Aneks 1992, str. 116).

Pierwszy problem został wpisany do *Księgi* 17 lipca 1935 roku przez Banacha, ostatni – sto dziewięćdziesiąty trzeci – przez Steinhausa 31 maja 1941 roku. Problemów jest więcej niż 193, gdyż numeracja bywa podwójna – mamy np. numer 10.1, 15.1 czy 17.1. Większość problemów jest rozwiązana, choć nie wszystkie. Rozwiązywanie tych problemów okazało się w kilku przypadkach czymś więcej niż jedynie gimnastyką umysłową czy sportem – zapoczątkowało nowe kierunki badań.

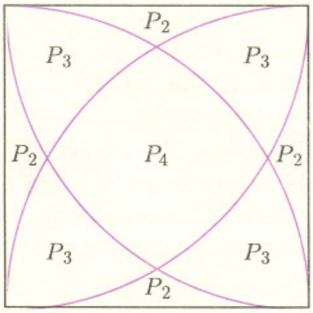


Napisałem, że *Księga Szkocka* pisana była w różnych językach. Jest jednak oczywiste, że dominującym był język polski. I tu dochodzimy do tego, co nam własna przemoc wzięła. Gdyby ktoś chciał dzisiaj sięgnąć po *Księgę Szkocką*, znajdzie ją jedynie w języku angielskim. Została mianowicie wydana w 1981 roku przez bostoński oddział wydawnictwa Birkhäuser. Wydanie bostońskie zostało przygotowane przez R. Daniela Mouldina z ogromnym zresztą udziałem matematyków polskich. Zawiera ono (poza uwagami o wcześniejszych publikacjach problemów *Księgi*) pięć referatów z konferencji poświęconej księdze (Stanisława Ulama, Marka Kaca, Antoniego Zygmunda, Paula Erdösa i Andrzeja Granasa) oraz wszystkie problemy z interesującymi komentarzami ponad pięćdziesięciu matematyków (głównie polskich). Opisuję tę książkę, gdyż – moim zdaniem – większość Czytelników nie ma szansy, by ujrzeć ją na własne oczy. W niej zaś można ujrzeć faksimile kilku stron oryginału... Ale nie rozbudzajmy apetytu.

Przytoczę teraz sześć problemów z *Księgi Szkockiej*: trzy rozwiązane i trzy nie rozwiązane.

152
STEINHAUS
Nagrody:
Za obliczenie częstości: 100 gramów kawioru;
Za dowód istnienia częstości: małe piwo;
Za kontrprzykład: pół czarnej.

6 listopada 1936



Koło o promieniu 1 zawiera co najmniej dwa punkty o obu całkowitych współrzędnych (x, y) i co najwyżej 5 takich punktów. Jeśli przesuwać to koło o wektory $n\mathbf{w}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, gdzie $\mathbf{w}$ ma obie współrzędne niewymierne i takie, że ich stosunek też jest liczbą niewymierną, to liczby 2, 3, 4 [*punktów o obu współrzędnych całkowitych*] powtórzą się nieskończenie wiele razy. Jaka jest częstość ich pojawiania się przy $n \to \infty$?
Czy ona istnieje?

⋆ Rozwiązanie tego problemu (za 100 gramów kawioru) wynika z ogólnego twierdzenia o ekwipartycji, które było znane Steinhausowi, gdy wpisywał problem 152 do *Księgi*. Czytelnikom polecam uzasadnienie bardziej prostego i zmyślnego podejścia: jeśli kwadrat jednostkowy podzielimy łukami jednostkowych okręgów zatoczonych z jego wierzchołków i otrzymane części ponazywamy tak jak na rysunku obok, to suma pól części nazywających się P_i będzie równa poszukiwanej częstości występowania i punktów o obu współrzędnych całkowitych w jednostkowym kole. Dla leniwych prostsze zadanie: uzasadnić, że jest to dla 2: $4 - \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$, dla 3: $2\sqrt{3} - 4 + \frac{\pi}{3}$, dla 4: $1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$. Oczywiście, można obliczyć pola poszczególnych figur na rysunku.⋆

44
STEINHAUS

Funkcja ciągła $z = f(x, y)$ opisuje powierzchnię, przez której każdy punkt przechodzą dwie proste całkowicie leżące na tej powierzchni. Wykazać, że tą powierzchnią jest paraboloida hiperboliczna. Zrobić to samo bez założenia ciągłości.

⋆ Czytelnikowi należy się objaśnienie, co to jest paraboloida hiperboliczna: jest to powierzchnia przypominająca kawaleryjskie siodło, a powstająca w ten sposób, że po paraboli trzymającej nóżki w górę ślizga się wierzchołkiem parabola leżąca stale w płaszczyźnie do niej prostopadłej (choć równoległej do osi pierwszej paraboli) trzymająca nóżki w dół. Budzi zapewne wątpliwość, czy przez każdy punkt takiej powierzchni przechodzą dwie proste – wątpliwości te są świetną okazją do podniesienia swojej matematycznej świadomości na wyższy poziom. W *Księdze Szkockiej* znajduje się pod tym zadaniem⋆

Dopisek Problem ten został rozstrzygnięty pozytywnie przez Banacha – również bez założenia ciągłości. Dowód jest oparty na spostrzeżeniu: dowolne dwie proste na takiej powierzchni albo się przecinają, albo ich rzuty na płaszczyznę xy są równoległe.

30 lipca 1935

⋆ Polecam naśladownictwo drogi Banacha.⋆

59
RUZIEWICZ

Czy można rozłożyć kwadrat na skończoną liczbę kwadratów tak, by każdy był innej wielkości?

⋆ Tu rozwiązanie można znaleźć zarówno w *Delcie* 7/1989, jak i w *Kalejdoskopie matematycznym* Steinhausa. Pełniejsze rozwiązanie jest w *Delcie*, choć najnowsze polskie wydanie *Kalejdoskopu* ukazało się w tym samym roku, a to jest 11 lat po uzyskaniu ostatecznego wyniku. Kwadrat można podzielić na 21 kwadratów różnej wielkości (największy będzie miał bok równy $\frac{25}{56}$ boku dzielonego kwadratu, najmniejszy zaś $\frac{1}{56}$) i na mniej się nie da, co udowodnił A.J.W. Duijvestijn.⋆

60
RUZIEWICZ

Czy można, dla danego $\varepsilon > 0$, tak podzielić powierzchnię sfery jednostkowej na skończenie wiele przystających i spójnych części, by każda miała średnicę mniejszą niż ε?

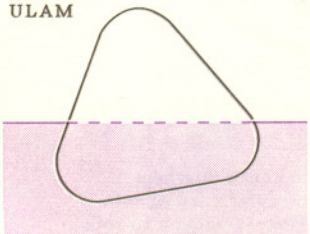
⋆ Problem może mieć rozmaity charakter w zależności od tego, czy będziemy wymagać by brzegi owych części były (a) wielokątami sferycznymi, (b) krzywymi skończonej długości, (c) dowolnymi zbiorami o zerowym polu. Jeśli odpowiedź nie zawsze jest pozytywna, to ciekawe byłoby podanie najmniejszej wartości ε, dla której odpowiedniego podziału można dokonać.

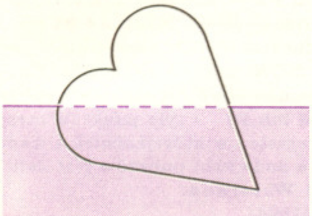
M.J. Wenninger podał w 1979 roku nietrywialny podział sfery na 120 przystających trójkątów sferycznych. Czy można zwiększyć tę liczbę bez czynienia trójkątów zbyt cienkimi? Na przykład, gdy zażądamy, by każdy bok trójkąta był mniejszy od $\frac{\pi}{3}$?⋆

⋆ Również *Kalejdoskop* i *Delta* wspominają jeszcze jeden problem.⋆

19
ULAM

Czy bryła o jednorodnej gęstości, która pływa po wodzie w dowolnej pozycji, musi być kulą?





⋆ Tutaj odpowiedź nie jest znana, poza szczególnymi przypadkami. Te szczególne przypadki to rozpatrywanie gęstości (rzadkości?) zerowej – problem sprowadza się do znalezienia bryły leżącej na poziomej płaszczyźnie w dowolnej pozycji (to „zero” jest traktowane jako sytuacja graniczna). I w takiej sytuacji odpowiedź jest pozytywna. Rozpatruje się także przypadek dwuwymiarowy, co też trudno uznać za normalną sytuację. Tu dla gęstości 0 jest odpowiedź pozytywna, ale np. dla gęstości $\frac{1}{2}$ jest wiele rozwiązań różnych od kuli (=koła) – całą serię podał Auerbach w 1938 roku. Są to figury, w których każda cięciwa połowiąca obwód połowi również pole. Dwie z nich są narysowane obok. Gdyby ktoś chciał jakiś wynik dla dowolnego wymiaru, to proszę: jeśli bryła, o którą chodzi, jest środkowo symetryczna, to przy gęstości $\frac{1}{2}$ musi być kulą. Tak więc rozwiązanie w przypadku ogólnym nie jest znane. A oto podobny problem wymyślony kilka lat temu.⋆

***
LIPNIACKI
WOJCIECHOWSKI

Przy jakiej ilości płynu w butelce środek ciężkości znajdzie się najniżej?

⋆ Zagadnienie ma znaczenie praktyczne – kiedy, mianowicie, zrobić sobie przerwę podczas korzystania z napojów w podróży. Nie podam rozwiązania, choć je znam – niech Czytelnicy mają sami zabawę.

Można z tego przykładu wysnuć wniosek, że zadania z *Księgi Szkockiej* to jedynie zabawa. Tak jednak nie jest, a to tylko ja wybieram te najprostsze. Oto jeszcze jedno. Tym razem sformułowane wielce naukowo, co nie dziwi, gdy zwrócić uwagę na długość listy autorów.⋆

10.1
MAZUR
AUERBACH
ULAM
BANACH

Twierdzenie. Jeśli $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem ciał wypukłych, z których każde ma średnicę $\leq a$, a suma ich objętości jest $\leq b$, to istnieje taki sześcian o średnicy $c = f(a,b)$, że można w nim rozłącznie umieścić te wszystkie ciała.
Wniosek. Kilogram ziemniaków da się zmieścić w worku skończonej wielkości.
Zadanie. Wyznaczyć funkcję $c = f(a,b)$.

⋆ Problem ten – rozumiany jako poszukiwanie najmniejszej takiej funkcji – do dziś nie został rozwiązany. Autorzy częściowych rozwiązań szukali zwykle nie sześciennego, lecz prostopadłościennego pudła. W 1957 roku Kosiński (oczywiście, dla przypadku k-wymiarowego) oszacował jego wymiary na $3a, 3a, \ldots, 3a,\ a + k!\frac{b}{a^{k-1}}$. W 10 lat później (ale tylko dla $k \geq 3$) Moon i Moser uzyskali inny wynik, bo $2a, 2a, \ldots, 2a,\ 2(a + k!\frac{b}{a^{k-1}})$. I do dziś wiadomo jedynie, że w przestrzeni k-wymiarowej, dla $k \geq 3$

$$f(a,b) \leq \sqrt{k}\min\{\max\{3a,\ a + k!\frac{b}{a^{k-1}}\},\ 2\max\{a,\ a + k!\frac{b}{a^{k-1}}\}\}.\star$$

Rozwiązanie zadania F 390. Mamy $m_A - m_B = 1 = -2{,}5\log E_A/E_B$, $E_A/E_B = 10^{0,4}$. Zakładając, że galaktyki mają podobną światłość I oraz uwzględniając, że $E = \frac{I}{r^2}$ otrzymujemy stosunek odległości najdalszych galaktyk obserwowanych w teleskopach A i B

$$\frac{r_A}{r_B} = 10^{0,2}.$$

Liczba galaktyk, przy założeniu ich równomiernego rozmieszczenia, jest proporcjonalna do objętości obserwowanej części Wszechświata, tj. do r^3

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{r_A^3}{r_B^3} = 10^{0,6} \approx 3{,}98.$$

Przy zadanej technice rejestracji iloczyn natężenia oświetlenia i powierzchni zwierciadła S jest wielkością stałą, tj.

$$E_A \cdot S_A = E_B \cdot S_B, \quad S \sim R^2,$$

gdzie R jest promieniem zwierciadła. Otrzymujemy więc

$$\frac{R_A}{R_B} = 10^{0,2} \approx 1{,}58.$$

Rozwiązanie zadania F 389. W stanie równowagi ilość energii produkowana we wnętrzu Ziemi jest równa energii wydobywającej się na powierzchnię. Strumień neutrin związanych z rozpadem potasu wynosi więc

$$a = \frac{1}{3}\frac{q}{E} = 1{,}9 \cdot 10^{12}\ \text{neutrin}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}).$$

Porównując ten strumień ze strumieniem neutrin słonecznych mamy $a/a_0 = 0{,}31\%$. Niech $m_0 = 40$ j.m.a. $= 66{,}4 \cdot 10^{-27}$ kg będzie masą izotopu ${}^{40}_{19}$K. Moc ciepła związanego z rozpadem na jednostkę masy potasu wynosi $\sigma = \frac{E}{m_0}\lambda = 2{,}9 \cdot 10^{-5}$ W/kg, gdzie $\lambda = \frac{\ln 2}{t}$ jest stałą rozpadu promieniotwórczego. Z bilansu ciepła mamy $\frac{1}{3}q = \frac{\sigma \cdot m}{s}$, gdzie m jest całkowitą masą ${}^{40}_{19}$K w Ziemi, a $S = 4\pi R^2$ jest powierzchnią Ziemi. Ostatecznie, porównując m z masą Ziemi otrzymujemy stężenie izotopu potasu

$$\frac{m}{M} = \frac{4\pi R^2 q}{3\sigma M} = 6{,}2 \cdot 10^{-8} = 6{,}2 \cdot 10^{-6}\%.$$