Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 271 (WT=2,41) i 272 (WT=2,50) z numeru 12/1993

Jan Kraszewski	– Legnica	44,75
Tomasz Kulpa	– Katowice	43,85
Mirosław Matlęga	– Skoczów	40,30
Paweł Lizak	– Puławy	38,64
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	36,64

Pan Kraszewski: nowa twarz w Klubie 44. Witamy !

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1994

Zadania z fizyki nr 183, 184

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 171 (WT=1,60) i 172 (WT=3,67) z numeru 1/1994

Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,09
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	35,48
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	32,85
Aleksander Surma	– Myszków	18,56

183. Dr Crimeon Falsegrant, skazany za defraudację neutrin słonecznych na 10^{100} lat więzienia, kręcił się w kółko po celi.
– Jakoś muszę się stąd wydostać! – powtarzał. – Z pewnością istnieje możliwość! Na początek zastosować przekształcenie konforemne w 11-wymiarowej przestrzeni spinorowej... albo lepiej nie, można nie powrócić już na oś rzeczywistą... A gdyby tak spróbować przejścia tunelowego? Ta ściana nie wygląda na bardzo grubą, chyba nie więcej niż metr... Trzeba tak rozepchnąć cząsteczki ściany, aby przeszły między nimi cząsteczki mojego ciała, powinno wystarczyć jakieś 20 eV na atom. To jest szansa!

Ocenić orientacyjnie szansę dr. Falsegranta.

Wskazówka: W mechanice kwantowej prawdopodobieństwo przejścia tunelowego cząstki o masie m przez barierę potencjału o szerokości d wyraża się wzorem

$$p \approx e^{-2\kappa d},$$

gdzie $\kappa = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\hbar = h/2\pi$, h – stała Plancka, E – deficyt energii.

184. Większą ilość rtęci nalano na płaską poziomą powierzchnię nie „zwilżaną” przez rtęć (np. szklaną). Obliczyć grubość warstwy rtęci.
Dane: gęstość rtęci $\varrho = 13{,}6\ \mathrm{g/cm^3}$, napięcie powierzchniowe $\sigma = 0{,}54\ \mathrm{N/m}$.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1994 i z numeru 6/1994

Przypominamy treść zadań:

174. Planetoida o masie $m = 50$ ton znajduje się w odległości $r = 100$ tys. km od środka Ziemi i leci z prędkością $v = 3$ km/s pod kątem $\alpha = 10^\circ$ do kierunku Ziemi. Czy planetoida minie Ziemię, czy rozbije się o jej powierzchnię? Czy porusza się po torze eliptycznym, parabolicznym czy hiperbolicznym? Promień Ziemi jest równy 6370 km.

179. Masa helikoptera wynosi $m = 900$ kg, a promień wirnika $r = 4$ m. Obliczyć minimalną moc silnika potrzebną do tego, aby helikopter wznosił się do góry z prędkością $v = 3$ m/s. Gęstość powietrza jest równa $\varrho = 1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$.

180. W przewodzącej powłoce kulistej o zewnętrznym promieniu R jest dziurka w kształcie koła o promieniu r znacznie mniejszym od R. Jeśli naładować powłokę pewnym ładunkiem elektrycznym, to jaka część tego ładunku będzie rozłożona na wewnętrznej stronie?

Rozwiązanie zadania M 716.
Weźmy dowolne trzy niewspółliniowe punkty A_1, A_2, A_3 i oznaczmy $f(A_i) = A_i'$, $i = 1, 2, 3$. Wobec zadania **M 714** istnieje izometria g (konkretnie: złożenie kilku symetrii osiowych) przekształcająca trójkąt $A_1'A_2'A_3'$ na trójkąt $A_1A_2A_3$. Zatem przekształcenie fg ma trzy nie leżące na jednej prostej punkty stałe A_1', A_2', A_3' – jest więc identycznością. W szczególności dla dowolnego Y mamy $fg(Y) = Y$. Oznaczając $g(Y) = X$ otrzymujemy tezę zadania. Rozważmy teraz punkt $P_0 = (1,0)$ i obrót ϕ względem początku układu o kąt $\sqrt{2} \cdot \pi$. Figura $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$, gdzie $P_{i+1} = \phi(P_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, ma tę własność, że każdy jej punkt po przekształceniu ϕ jest nadal jej punktem, nie ma natomiast punktu, którego obrazem byłby punkt P_0.

174. Zadanie sprowadza się do wykorzystania dwóch stałych ruchu: energii $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ i momentu pędu $K = mvr\sin\alpha$. Iloczyn GM we wzorze na energię można zastąpić wyrażeniem gR_z^2 (gdzie R_z – promień Ziemi), którego wartość wynosi $3{,}98 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3s^{-2}}$. Najprościej jest ustalić rodzaj krzywej (elipsa, parabola czy hiperbola), gdyż zależy to od znaku energii. W naszym przypadku $E \approx m(4{,}5 - 3{,}98) \cdot 10^6\ \mathrm{J/kg} = m \cdot 0{,}52 \cdot 10^6\ \mathrm{J/kg}$ i widzimy, że tor jest hiperbolą. Aby odpowiedzieć na pierwsze pytanie, należy obliczyć odległość r_p perygeum od środka Ziemi. Ponieważ w perygeum kierunek ruchu jest prostopadły do promienia wodzącego, więc $K = mv_pr_p$. Podstawiając $v_p = \frac{K}{mr_p}$ do wyrażenia na energię otrzymujemy równanie kwadratowe pozwalające wyznaczyć wielkość $1/r_p$. Rozwiązaniem jest

$$\frac{1}{r_p} = \left(\frac{K}{m}\right)^{-2}\left(GM + \sqrt{(GM)^2 + \frac{2E}{m}\cdot\left(\frac{K}{m}\right)^2}\right).$$

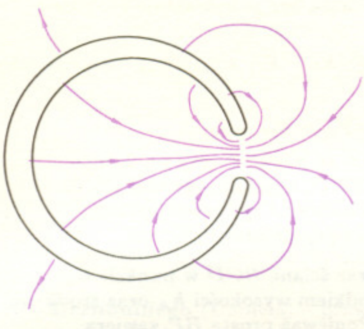
Podstawienie danych liczbowych daje w wyniku $r_p = 3394$ km, zatem planetoida rozbije się o powierzchnię Ziemi ($r_p < R_z$). Masa planetoidy – jak widać z rachunków – nie ma żadnego znaczenia.

179. Rozpatrzmy układ odniesienia związany z helikopterem: wtedy powietrze w dużej odległości od niego porusza się z prędkością v w dół, natomiast prędkość strumienia powietrza przechodzącego przez krąg wirnika oznaczmy przez v'. Jeśli w czasie dt wirnik rozpędza masę powietrza dm od prędkości v do v', to moc silnika jest równa $P = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}(v'^2 - v^2)$, a siła ciągu $F = \frac{dm}{dt}(v' - v)$. Wielkość $\frac{dm}{dt}$ należy obliczyć ze wzoru $\frac{dm}{dt} = S\varrho v'$ (gdzie $S = \pi r^2$ – pole powierzchni wirnika), a dalej znajdujemy

$$v' = \frac{1}{2}\left(v + \sqrt{v^2 + 4\phi}\right),$$

$$P = \frac{1}{2}F(v' + v) = \frac{1}{4}F\left(3v + \sqrt{v^2 + 4\phi}\right),$$

gdzie przez ϕ oznaczyliśmy wielkość $\frac{F}{S\varrho}$. Przyrównując F do ciężaru helikoptera mg i podstawiając dane obliczamy $P \approx 74$ kW. Ten sam wynik otrzymuje się w układzie związanym z Ziemią, w którym energia zostaje zużyta na rozpędzanie strumienia powietrza od prędkości zero do $v' - v$ oraz na podnoszenie helikoptera. Oczywiście, w rzeczywistości potrzebna moc jest większa ze względu na różne straty (np. „zbędny" ruch wirowy powietrza).



180. Oznaczmy ładunek powłoki przez Q i przyjmijmy jego dodatni znak dla ustalenia uwagi. Z zasady superpozycji pól wynika, że pole powłoki otrzymamy dodając następujące pola:
1) Pole kuli bez dziury, naładowanej tym samym ładunkiem Q równomiernie rozłożonym na jej powierzchni.
2) Pole „cienkiej klapki na dziurze", tzn. brakującej części powłoki, naładowanej ujemnym ładunkiem q o wartości takiej, aby łączny ładunek w dziurze był równy zeru:

$$q = -Q\frac{\pi r^2}{4\pi R^2} = -Q\frac{r^2}{4R^2}.$$

3) Pole ładunków położonych na wewnętrznej stronie powłoki (oznaczmy ich łączną wartość przez q').
4) Pole „nadwyżki" ładunków na zewnętrznej stronie powłoki, tzn. różnicy między rzeczywistym nierównomiernym rozkładem ładunków na kuli z dziurą a rozkładem wprowadzonym w punkcie 1). Oznaczmy łączną wartość „nadwyżki" jako q''.

Rysunek ilustruje sumę pól opisanych w punktach 2), 3) i 4). Całkowity ładunek układu źródeł musi być równy rzeczywistemu całkowitemu ładunkowi Q (wynika to z prawa Gaussa). Zatem

$$q' + q'' = -q = Q\frac{r^2}{4R^2}.$$

Aby znaleźć wartość q', zbadajmy dokładniej pole w samym otworze, tuż pod wyimaginowaną „klapką" (od wewnątrz). Pole 1) jest tu równe zeru, a z pozostałych przeważa pole 2), jako pochodzące od najbliżej położonych źródeł. Ponieważ małą „klapkę" można w przybliżeniu uznać za płaskie kółko, więc połowa linii pola wpływa do „klapki" z jednej, a połowa z drugiej strony. Linie pola wpływające do „klapki" od strony wnętrza kuli muszą zaczynać się na ładunkach q', czyli, zgodnie z prawem Gaussa

$$q' = -\frac{q}{2} = Q\frac{r^2}{8R^2}.$$

Autor pierwotnie rozpatrywał zadanie nieco inne: znaleźć natężenie pola elektrycznego w środku kuli z dziurką, naładowanej ładunkiem Q. Problem wydaje się trudny – może jednak ktoś z Czytelników go „złamie"?

Pominięcie pola odległych ładunków q' i q'' w porównaniu z polem bliskich ładunków q jest uzasadnione, gdyż wszystkie te ładunki są podobnej wielkości (rzędu Qr^2/R^2). Otrzymane wyniki będą słuszne tylko w pierwszym rzędzie względem małego parametru r^2/R^2.

Zadania z matematyki nr 285, 286

Redaguje Marcin E. KUCZMA

285. W przestrzeni danych jest 10 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łączymy pewne pary punktów odcinkami tak, aby każde dwa spośród rozważanych punktów łączyła dokładnie jedna linia łamana utworzona z narysowanych odcinków. Ile jest różnych układów odcinków spełniających ten warunek? (Dla przykładu, gdyby zamiast zbioru 10 punktów rozważać zbiór 3 punktów, wówczas istniałyby trzy układy odcinków o analogicznej własności.)

286. Dla każdej rzeczywistej wartości parametru t wyznaczyć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniające układ równań

$$\begin{cases} (x^2 - yz)(x + t) + (y^2 - zx)(y + t) + (z^2 - xy)(z + t) = 0 \\ (t + 2)(x + y + z) = 1. \end{cases}$$

Zadanie **286** zostało opracowane na podstawie propozycji zgłoszonej przez pana Krzysztofa Zapiska z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1994

Przypominamy treść zadań:

281. Mamy sześć komórek pamięci ponumerowanych od 1 do 6; w każdej komórce znajduje się (w chwili początkowej) liczba 0. Rzucamy kostką; jeśli wypadnie i oczek, zwiększamy o 1 zawartość i-tej komórki. Czynność tę powtarzamy do momentu, gdy we wszystkich komórkach pojawią się liczby jednakowej parzystości.

(a) Wykazać, że z prawdopodobieństwem równym jedności konfiguracja kończąca pojawi się w pewnym momencie.
(b) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

282. Wewnątrz czworościanu $ABCD$ znajduje się punkt P. Jego odległości od wierzchołków A, B, C, D równe są odpowiednio R_A, R_B, R_C, R_D, a od ścian BCD, ACD, ABD, ABC – odpowiednio r_A, r_B, r_C, r_D. Dowieść, że

$$256\, r_A r_B r_C r_D \le (R_A + r_A)(R_B + r_B)(R_C + r_C)(R_D + r_D).$$

Kiedy zachodzi równość?

281. W każdym kroku (tj. po każdym rzucie kostką) łączna zawartość wszystkich komórek zmienia parzystość. Zatem konfiguracja kończąca może pojawić się tylko po parzystej liczbie kroków. Oznaczmy przez p_n prawdopodobieństwo tego, że pojawi się ona po $2n$ krokach. Oczywiście, $p_1 = 1/6$ (w drugim rzucie musi wypaść to samo, co w pierwszym).

Przyjmijmy oznaczenia: B – stan początkowy, E – stan końcowy, C – każdy inny stan możliwy do uzyskania w parzystej liczbie kroków. Przypuśćmy, że stan E następuje po $2n$ krokach, $n \ge 2$. Ewolucję układu można więc przedstawić tak:

$$B \to \underbrace{C \to C \to C \to \ldots \to C}_{n-2 \text{ strzałek}} \to E,$$

gdzie każda strzałka symbolizuje dwa kroki. Przejście $B \to C$ odbywa się z prawdopodobieństwem $1 - p_1 = 5/6$.

W każdym stanie C mamy w czterech komórkach liczby parzyste, a w dwóch komórkach liczby nieparzyste – lub odwrotnie. Przejście $C \to E$ następuje dokładnie wtedy, gdy w dwóch kolejnych krokach zostaną uzyskane numery tych właśnie dwóch komórek, które są „w mniejszości". Prawdopodobieństwo tego, że tak się stanie, wynosi $(1/3) \cdot (1/6) = 1/18$. Wobec tego przejście $C \to C$ następuje z prawdopodobieństwem $17/18$. Prawdopodobieństwo ewolucji przedstawionej na powyższym diagramie (oznaczone wcześniej przez p_n) równa się więc

$$p_n = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{17}{18}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{18} \qquad (\text{dla } \ n \ge 2).$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} p_n = \frac{1}{6} + \frac{5}{6 \cdot 18} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{17}{18}\right)^m = 1$$

(suma szeregu geometrycznego). Daje to uzasadnienie tezy (a).

Aby wykonać (b), skorzystamy ze wzoru

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = (1 - x)^{-2} \qquad \text{dla } \ x \in (-1; 1)$$

(który można otrzymać na przykład różniczkując stronami równość $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1 - x)^{-1}$). Rozważana zmienna losowa (liczba rzutów) przyjmuje wartość $2n$ z prawdopodobieństwem p_n, a zatem jej wartość oczekiwana wynosi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n p_n = 2p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2n p_n = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{5}{6 \cdot 18} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{17}{18}\right)^{n-2} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{3 \cdot 17} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{17}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3 \cdot 17} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{17}{18}\right)^{n-1} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{3 \cdot 17} \left(\left(\frac{1}{18}\right)^{-2} - 1\right) = 32.$$

282. Oznaczmy przez S_X pole ściany leżącej naprzeciwko wierzchołka X, przez V_X – objętość ostrosłupa, którego podstawą jest ta ściana, a wierzchołkiem punkt P, wreszcie przez h_X – wysokość czworościanu $ABCD$ opuszczoną z wierzchołka X na tę ścianę (X może oznaczać dowolną z liter A, B, C, D). Objętość V czworościanu $ABCD$ wyraża się następującymi wzorami:

$$V = \tfrac{1}{3} h_A S_A = \tfrac{1}{3} h_B S_B = \tfrac{1}{3} h_C S_C = \tfrac{1}{3} h_D S_D$$

oraz

$$V = V_A + V_B + V_C + V_D, \text{ gdzie } V_X = \tfrac{1}{3} r_X S_X \text{ dla } X \in \{A, B, C, D\}.$$

Zauważając, że $R_X + r_X \ge h_X$ dla $X \in \{A, B, C, D\}$ oraz stosując nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną wnosimy, że

$$(R_A + r_A)(R_B + r_B)(R_C + r_C)(R_D + r_D) \ge h_A h_B h_C h_D =$$

$$= \frac{(3V)^4}{S_A S_B S_C S_D} = \frac{3^4 (V_A + V_B + V_C + V_D)^4}{S_A S_B S_C S_D} \ge$$

$$\ge \frac{3^4 \cdot 4^4 \cdot V_A V_B V_C V_D}{S_A S_B S_C S_D} = 256\, r_A r_B r_C r_D.$$

Aby zachodziła równość, muszą być jednocześnie spełnione warunki:

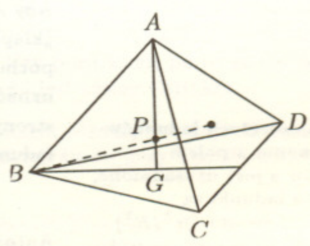
(1) $R_A + r_A = h_A, \quad R_B + r_B = h_B, \quad R_C + r_C = h_C, \quad R_D + r_D = h_D$

oraz

(2) $$V_A = V_B = V_C = V_D.$$

Układ równości (1) oznacza, że punkt P leży na każdej wysokości czworościanu $ABCD$, a układ równości (2) oznacza, że punkt P jest środkiem ciężkości tego czworościanu. Przypuśćmy, że te warunki są spełnione.

Prosta AP przecina wówczas ścianę BCD w punkcie G, który jest jednocześnie spodkiem wysokości h_A oraz środkiem ciężkości trójkąta BCD. Ponieważ prosta BP zawiera wysokość h_B, zatem płaszczyzna przechodząca przez punkty A, B, G, P jest prostopadła do płaszczyzn BCD i CDA, więc i do krawędzi CD. Wobec tego prosta BG zawiera wysokość trójkąta BCD. A skoro zawiera ona również środkową tego trójkąta, otrzymujemy wniosek, że jest to trójkąt równoramienny: $|BC| = |BD|$. Analogicznie można wykazać, że każde dwie krawędzie czworościanu $ABCD$ mają równe długości.



Stąd wynika, że udowodniona nierówność staje się równością tylko dla czworościanu foremnego.