

Staszic i pioruny

Krzysztof REJMER



Rozwiązanie zadania F 387.

Z prawa Stefana-Boltzmann'a i wzoru $E = Mc^2$ mamy

$$\frac{d(Mc^2)}{dt} = -S\sigma T^4.$$

Podstawiając wzór na temperaturę i powierzchnię S otrzymujemy

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\alpha}{M^2},$$

gdzie

$$\alpha = \frac{16\pi G\sigma}{c^6} \left(\frac{hc^3}{8\pi kG}\right)^4 = 4 \cdot 10^{15} \text{ kg}^3/\text{s}.$$

Calculując otrzymujemy warunek

$$M > M_0 = (3\alpha t_0)^{1/3} = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ kg}.$$



Rozwiązanie zadania F 388.

Z prawa Stokesa siła oporu jest

równa $F = 6\pi\eta r v$, siła oporu aerodynamicznego zaś $F_1 = \frac{1}{2}c\varrho v^2\pi r^2$,

gdzie r oznacza promień kropelki.

Na kropelkę działa siła ciężkości

$$Q = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g. \text{ W doświadczeniu}$$

Millikana kropelka spada ze stałą prędkością. Powyższe informacje możemy zapisać za pomocą dwóch równań:

$$6\pi\eta r v = \frac{1}{2}c\varrho v^2\pi r^2,$$

$$6\pi\eta r v + \frac{1}{2}c\varrho v^2\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g.$$

Rozwiązując powyższy układ równań ze względu na r otrzymujemy

$$r = \left(\frac{54(1+\varepsilon)\eta^2}{\varrho^2 c g}\right)^{1/3} = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$



Rozwiązanie zadania M 712. Mamy

$$80! = 10! \cdot$$

$$\underbrace{(11 \cdot 80) \cdot (12 \cdot 79) \cdot \dots \cdot (45 \cdot 46)}_{35 \text{ par}}.$$

Dla każdego $k \in [0, 34]$ prawdziwa jest nierówność

$$(11+k)(80-k) = 880 + k(69-k) > 800 = 2^3 \cdot 10^2,$$

a zatem

$$80! > 10! \cdot 2^{3 \cdot 35} 10^{2 \cdot 35} > 10! \cdot 10^{30} 10^{70} = 10! \cdot 10^{100},$$

$$\text{bowiem } 2^{10} = 1024 > 10^3.$$

Stanisław Staszic (1755–1829) jest nie bez racji uważany za ojca polskiej geologii. Podczas swych badań interesował się także zjawiskami przyrody, wśród nich burzą. Świadczą o tym liczne opisy burz zawarte w jego największym dziele *O ziemiorództwie Karpatów i innych gór i równin Polski* wydanej w 1815 roku w Warszawie, pisanej między innymi w oparciu o spostrzeżenia poczynione podczas wędrówek karpaccich w latach 1804 i 1805.

„Po trzech godzinach czasu naszego wychodu w gory, nagle Ciepłomierz podniósł się do 17. Uważałem to na gorach barzo często, że krotko przed deszczem, Piorunomierz zaczął wydawać wielkie znaki elektryczności sklennej (*electricité vitreuse*). Wiatr powstał silny od połnocy. Gęste zaczęły przeciągać chmury. Wkrótce cały wierzch cypla, na który wyiść chciałem znikł w ciemnych chmurach. Te wszystkie jakoby wychodząc z gor Tatrow, zdawały się wydobywać dymem z sterczących najwyższych rypow; a potem stanąć bałhanami w ostatnie holic rowniny.”

Tych kilka zdań wymaga komentarza. Temperatura podana przez Staszica mierzona była w stopniach Reaumura, odpowiadała ona wartości 12°C.

„Elektryczność sklenna”, czyli szklana, to w dzisiejszym języku ładunek dodatni (szkło zwykle elektryzuje się dodatnio). Od 1733 roku używano za Du Fayem terminów: elektryczność szklana i żywiczna. Pojęcia ładunku dodatniego i ujemnego pojawiły się znacznie później. Powróćmy jednak do obserwacji Staszica.

„W roku 1804. Dnia 10 Lipca, zdarzyło mi się między tutejszych skał szczotami, osobliwsze elektryczności doświadczenie: O godzinie trzeciej po południu elektrometr zaczął dawać wielkie znaki piorunoplinu. Mając pilniejszą na jego skutki uwagę, spostrzegłem, że jm więcej z elektrometrem zbliżałem się ku cypłom skały, tem więcej respierały się jego gałki; a im dalej odchodziłem od skał, tem mniejsze elektryczności znaki. Elektryczność była żywicznego gatunku (*electricité resineuse*).”

W obu opisach zawarte jest ważne spostrzeżenie, którego znaczenia, niestety, Staszic nie umiał docenić. Podczas dobrej pogody powierzchnia Ziemi naładowana jest ujemnie, natomiast podczas burzy, gdy wiszą nad nią chmury o ujemnie naładowanym dnie – elektryzuje się przez indukcję ładunkiem dodatniego znaku. O tym właśnie wspomina Staszic w pierwszym z cytowanych opisów: zauważył on, że często przed deszczem powierzchnia Ziemi naładowana jest dodatnio. Często, ale nie zawsze, ponieważ nie każdej ulewie towarzyszy burza, choć letnią porą burze są w górach częstym zjawiskiem. W drugim opisie Staszic zauważa, że powierzchnia Ziemi jest naładowana ujemnie. Opisujący efekt jest wyraźnie związany z ładunkiem znajdującym się na powierzchni Ziemi, gdyż słabnie przy oddalaniu się od skał. Obserwacje te zostały poczynione na półtorej godziny przed burzą, a więc jeszcze przy dobrej pogodzie. Jednak podczas burzy „Piorunomierz nie przestawał dawać wiele znaku elektryczności, zawsze w gatunku żywicznej.” To bardzo zastanawiające spostrzeżenie. Podczas burzy znak ładunku powierzchniowego Ziemi powinien się zmienić, tymczasem z opisu wynika, że tak się nie stało. Istnieją trzy możliwe wytłumaczenia tego. Zdarzenie miało miejsce w okolicy Morskiego Oka, pośród granitowych skał, które są złym przewodnikiem elektryczności; z tego powodu przemieszczenie się powierzchniowych ładunków było utrudnione. Inaczej jest tam, gdzie istnieje choćby cienka warstwa wilgotnej gleby będącej dobrym przewodnikiem elektrycznym. Drugie możliwe wytłumaczenie wiąże się z istnieniem w dnie chmury niewielkiego obszaru naładowanego dodatnio. Fragment powierzchni Ziemi znajdujący się bezpośrednio pod spodem jest naładowany ujemnie. To wyjaśnienie należy jednak zdecydowanie odrzucić, ponieważ podczas górskiej burzy chmury nie wiszą nieruchomo nad Ziemią, czemu dał świadectwo sam Staszic: „Chmury zaś wiatrem parte o skałę, w kilka minut, jeszcze większą siłą jakoby odepchnięte, powracały nazad z okropnym szumem.”

**Rozwiązanie zadania M 711.**

Z pierwszej nierówności wynika, że przynajmniej jedna z liczb – powiedzmy c – jest dodatnia. Z drugiej nierówności mamy

$$-2(a+b)c < 2ab \leq (a+b)^2$$

(ta ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych a i b). Stąd

$$(a+b)(a+b+2c) > 0,$$

a ponieważ $a+b+2c > a+b+c > 0$, więc $a+b > 0$. Zatem a lub b jest liczbą dodatnią. W każdej sytuacji z trzeciej nierówności wynika, że pozostała też.

Inna metoda:

$$a = \frac{(a+b+c)a^2 + abc}{a^2 + ab + bc + ca} > 0,$$

podobnie wyrażamy b i c .

Zadanie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia mówiącego, że dodatniość wszystkich wielomianów symetrycznych podstawowych n zmiennych (tu $n = 3$) pociąga za sobą dodatniość wszystkich argumentów.

**Rozwiązanie zadania M 718.**

Można skorzystać z (łatwej w dowodzie – należy obliczyć ekstremum) nierówności

$$u^{2/3} + \frac{2}{3u} \geq \frac{5}{3},$$

gdzie równość ma miejsce tylko dla $u = 1$.

Korzystając teraz z nierówności dla średniej arytmetycznej i geometrycznej obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{2}{3abc} &\geq \\ &\geq (abc)^{2/3} + \frac{2}{3abc} \geq \frac{5}{3} \end{aligned}$$

(przy czym pierwsza równość ma miejsce tylko dla $a = b = c$, a druga tylko gdy $abc = 1$; stąd równość ma miejsce tylko dla $a = b = c = 1$). Mnożąc uzyskaną nierówność przez 3 i przenosząc $a^2 + b^2 + c^2$ na drugą stronę otrzymujemy tęż zadania.

Można też skorzystać z nierówności $1+t \leq e^t$. Oznaczamy mianowicie $x = 1 - a^2$, $y = 1 - b^2$, $z = 1 - c^2$. Mamy wówczas

$$\begin{aligned} (5 - a^2 - b^2 - c^2)abc &= \\ &= 2 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \right) \cdot \\ &\cdot \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)} \leq \\ &\leq 2e^{\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}} \sqrt{e^{-(x+y+z)}} = 2. \end{aligned}$$

Najbardziej prawdopodobne jest to, że Staszic znajdował się na tyle wysoko, że rejestrował ujemny ładunek dna chmury. Przemawiałoby za tym wytłumaczenie zachowania się chmur, jakie podaje:

„Tu przekonałem się: że ta gwałtowność, którą uważałem często w Tatrach, iż chmury po odbiciu się od skał, powracają zawsze z wiatrem gwałtowniejszym, od tego z jakim ku skałom bywały parte; przekonałem się mową, że gwałtowność odbijania się chmur jest skutkiem elektryczności.”

Ten fragment jest wyraźnie jednoznaczny. Chmury są odpychane od skał na skutek obecności ładunków elektrycznych, muszą to być ładunki tego samego znaku. Ponieważ w pierwszym pomiarze Staszic stwierdził ujemny ładunek na powierzchni Ziemi, w drugim mógł mieć na myśli ładunek dna chmury. Oczywiście, to wyjaśnienie zachowania się chmur jest błędne. Ponadto oba pomiary zostały wykonane z półtoragodzinnym odstępem. W tym czasie mógł zmienić się znak powierzchniowego ładunku Ziemi. Nie umniejsza to wagi spostrzeżeń Staszica związanych z istnieniem i znakiem powierzchniowego ładunku Ziemi. Nie są mi znane wcześniejsze obserwacje innych badaczy, na przykład Franklina. Byłby Staszic więc pierwszym?

Jest jeszcze jeden godny uwagi fenomen opisany przez Staszica, który nadaje się do księgi Guinnessa. Było to podczas burzy, którą przeżył latem 1805 roku pod Babią Górą. Miała ona charakter żywiołowej katastrofy o rzadko spotykanych rozmiarach, połączonej z silnym gradobiciem. Burza ta poczyniła wielkie spustoszenia na Orawie, Podhalu i Spiszu. Ale oddajmy głos Staszicowi: „Przy Spitkowicach spadła z powietrza sztuka lodu, która półtora stopy w długość, a stopę i trzy cale w szerokość i tyleż na rubość miała. Ja w cztery godziny po jej spadnięciu widziałem ją. To jeszcze 52 funtów ważyła. Była barzo gładka i jasna (*translucide*).”

Pierwszy problem to jednostki, jakimi posługiwał się Staszic. W XVIII stuleciu w użytku były funty warszawskie, rosyjskie, angielskie i niemieckie, nieco się różniące. Przyjmując, że funt to około 0,5 kg, wnioskujemy, że masa lodowej bryły wynosiła około 25 kg. Jeśli jednak obliczymy jej objętość i pomnożymy przez gęstość lodu (900 kg/m^3), to w zależności od tego, czy posłużymy się stopami i calami rosyjskimi czy polskimi, otrzymamy masę około 38 lub 44 kg. Oczywiście, objętość możemy obliczyć tylko w przybliżeniu, ponieważ bryła lodu miała zapewne nieregularny kształt, ale i tak rozbieżność obu wyników jest zbyt duża. Sensownym wytłumaczeniem mogłaby być niejednorodność lodowej bryły; duże gradziny często mają strukturę zlepieńców. Gęstość lodu byłaby wtedy mniejsza, co wraz z błędem wyznaczenia objętości czyni zgodność rozmiarów i masy bryły prawdopodobną. Jednak Staszic wyraźnie akcentuje gładkość i jasność bryły, wskazuje to na jej jednorodność. Ostatnie wyjaśnienie, które sugeruje sam tekst, jest jednocześnie proste i mało prawdopodobne. Rozmiary bryły mogły zostać zmierzone zaraz po upadku, natomiast Staszic widział ją i zważył cztery godziny później, kiedy częściowo roztopiła się. Ale któż na początku XIX wieku, w zapadłej górskiej wiosce, w miejscu gdzie diabeł mówi dobranoc, mierzyłby rozmiary lodowej bryły?!

Stanisław Staszic powszechnie uważany jest za wzór suchego racjonalisty, tymczasem wiele opisów burz zawartych w dziele *O ziemiorództwie...* burzy tę opinię ukazując w Staszicu naturę wrażliwą na piękno, emocjonalną, wręcz romantyczną. Nie widać tego w tych kilku krótkich z konieczności cytatach. Wielu fragmentów tych opisów nie powstydziliby się niejeden z poetów wędrujących po polskich górach pół wieku później. Zawsze jednak gdy kończy się burza, naukowiec bierze górę nad poetą. Bystry obserwator odnotowuje każdy godny uwagi fakt: zachowanie się chmur, elektrometru, zwierząt.

Każdemu Czytelnikowi wędrującemu latem po górach życzymy, aby burze przeżywał zawsze w bezpiecznym miejscu i aby umiał dostrzec nie tylko grozę, ale również piękno tego fascynującego zjawiska.