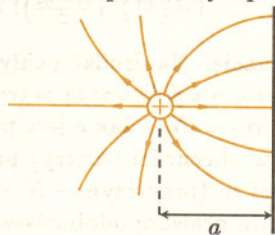


Metoda obrazów

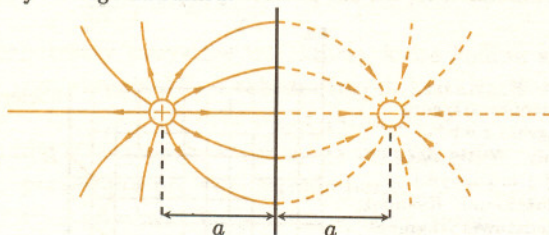
Krzysztof REJMER

Popularna w elektrostatyce metoda obrazów pozwala znaleźć rozkład natężenia pola elektrostatycznego wytworzonego przez układ ładunków znajdujących się w obecności przewodników. Rozważmy najprostszą sytuację: ładunek punktowy i przewodzącą płaszczyznę.



Rys. 1. Linie pola elektrostatycznego są prostopadłe do płaszczyzny.

Z elektrostatyki wiemy, że powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną, a wektor natężenia pola jest do niej prostopadły. Gdybyśmy po drugiej stronie płaszczyzny umieścili ładunek będący zwierciadlanym odbiciem rzeczywistego ładunku ze zmienionym znakiem, a następnie usunęli płaszczyznę przewodzącą, to rozkład natężenia pola w półprzestrzeni, w której znajduje się rzeczywisty ładunek, nie uległby zmianie. Ten drugi ładunek, który wprowadziliśmy jako obiekt pomocniczy, nosi nazwę obrazu (elektrycznego) rzeczywistego ładunku.



Rys. 2. Ładunek i jego obraz względem płaszczyzny tworzą dipol elektryczny.

Sens metody obrazów jest więc prosty: natężenie pola elektrostatycznego znajdujemy jako superpozycję natężeń pól pochodzących od ładunków rzeczywistych i elektrycznych obrazów utworzonych za pomocą zwierciadlanego odbicia (ze zmianą znaku ładunku) względem powierzchni każdego przewodnika. Reszta to jedynie kwestia sprawności rachunkowej.

Nie każdy wie, że metodę obrazów można zastosować w analizie innych problemów, na przykład w rachunku prawdopodobieństwa. Rozważmy jednowymiarowe zagadnienie błądzenia przypadkowego. Cząstka porusza się wzdłuż linii prostej, wykonując skoki o jednostkowej długości. Każdy skok jest statystycznie niezależny od poprzedniego, a prawdopodobieństwo skoku w lewo i skoku w prawo są jednakowe, a zatem równe $1/2$. Wyobraźmy sobie pijaną pchłę skaczącą aleją; na każdym końcu alei jest bar, a pchła jest tak bardzo nietrzeźwa, że nie pamięta o poprzednim skoku ani nie rozpoznaje, w jakim miejscu alei się znajduje, pamięta tylko o tych barach. Oznaczmy przez O punkt startu. Po N skokach pchła może się maksymalnie oddalić od niego do punktu o współrzędnej N lub $-N$. Chcemy określić prawdopodobieństwo tego, że po N skokach pchła znajdzie się w punkcie o współrzędnej m , przy czym $|m| \leq N$. Dla parzystych N interesujące są tylko parzyste wartości m , dla nieparzystych N – nieparzyste. Aby znaleźć się w punkcie o współrzędnej m , pchła musi wykonać $\frac{N+m}{2}$ skoków w prawo oraz $\frac{N-m}{2}$ skoków w lewo. Kolejność, w jakiej te skoki będą wykonywane, jest obojętna, ważna jest tylko liczba skoków

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (IX)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Tomasz HOFMOKL

Czy rzeczywistość jest rzeczywista?

W moim cyklu artykułów przekonuję Państwa, że wyniki doświadczeń w świecie bardzo małych składników materii są nie do pogodzenia z naszym wyobrażeniem porządku w przyrodzie, jakie wyrobiliśmy sobie na podstawie obserwacji zjawisk makroskopowych lub, inaczej mówiąc, zjawisk z życia codziennego. Tę niezgodność określiłem terminem „wbrew zdrowemu rozsądkowi”.

Zjawiska te, z drugiej strony, są bardzo dobrze zbadane i nie mamy najmniejszych podstaw, aby uzyskane wyniki poddawać w wątpliwość. Pozostaje więc uznanie, że przyroda jest znacznie bogatsza, niż może to nam się wydawać i że musimy rozszerzyć kryteria tego, co jest, a co nie jest zgodne ze zdrowym rozsądkiem. Osobiście uważam, że uczy to nas pokory i ostrożności przy ferowaniu wyroków, co jest, a co nie jest możliwe.

Pisałem ostatnio o pierwszych zjawiskach, które doprowadziły do powstania koncepcji kwantów, czyli o promieniowaniu ciała doskonale czarnego i o zjawisku fotoelektrycznym. Rozważania nad pierwszym skłoniły Maxa Plancka do wprowadzenia koncepcji porcji energii, czyli kwantu energii, a drugie, pozwoliło Albertowi Einsteinowi na wysunięcie hipotezy, że światło ma naturę korpuskularną – rozchodzi się w postaci cząstek – fotonów. Dalsze doświadczenia wykazały, że materia ma również własności falowe i korpuskularne, co uwidacznia się, między innymi, w zaskakującym zjawisku przechodzenia elektronu przez dwa otwory równocześnie bez dzielenia się. W ostatnim zaś artykule pisałem o przenikaniu cząstki alfa przez ścianę, inaczej mówiąc, przez barierę potencjału, co doprowadziło do stwierdzenia, że zachowanie się cząstki możemy opisać tylko podając prawdopodobieństwo znalezienia jej w danym punkcie przestrzeni i czasu, a nie możemy przewidzieć jej losów z całą pewnością. Krok po kroku coraz bardziej odbiegamy od utartych pojęć i interpretacji

fizyki klasycznej, która jest w tym miejscu synonimem zdrowego rozsądku. Nagromadziło się tych odstępstw już sporo i dlatego chciałbym tym razem napisać o kłopotach ze zrozumieniem, czyli interpretacją mechaniki kwantowej. Kłopoty te już mieli twórcy tej dziedziny nauki i byłoby przesadą twierdzić, że dziś nikt już ich nie ma. Przypomnijmy całą historię w porządku chronologicznym.

Mechanika kwantowa narodziła się w latach dwudziestych obecnego stulecia w oparciu o analizę nagromadzonych przez ubiegłe lata wyników doświadczeń, które można by określić jako sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem, czyli takich, których nie udawało się wyjaśnić na podstawie znanych dotychczas zasad fizyki. Twórcami tej nowej nauki byli de Broglie, Heisenberg, Schrödinger, Born, Bohr. Opierała się ona na pracach dwóch, można tak powiedzieć, gigantów współczesnej fizyki: Maxa Plancka i Alberta Einsteina. W miarę rozwoju mechaniki kwantowej potwierdzało ją coraz więcej faktów doświadczalnych wskazując równocześnie, że trzeba odrzucić, wydawałoby się tak podstawowe dogmaty nauki, jak determinizm, realizm, kompletność.

Pierwszy padł ofiarą determinizm. W 1926 roku Max Born wykazał, że w przeciwieństwie do fizyki klasycznej, która jest w stanie przewidzieć dokładnie przebieg zjawiska, mechanika kwantowa pozwala obliczyć tylko prawdopodobieństwo zajścia określonego zjawiska. Mogą Państwo wyobrazić sobie, że takie postawienie sprawy wzbudzało niezwykle namietności. Jak to? Nie można przewidzieć dokładnie przebiegu zjawiska? Przypadek może odgrywać zasadniczą rolę? Stąd bierze się słynne powiedzenie Einsteina, że Pan Bóg nie gra w kości. Łatwiej było się pogodzić z myślą, że to my nie umiemy ściśle przewidywać przyszłości, że mamy niedoskonałą teorię, ale równocześnie wierzyć, że kiedyś, jak zbudujemy doskonalszą jej wersję, to okaże się, że wszystko da się przewidzieć. Powstała koncepcja tak zwanej teorii z ukrytymi parametrami. Gdybyśmy je znali, wtedy można by przewidywać zachowanie się cząstek w pełni dokładnie, a nie tylko obliczać prawdopodobieństwa.

W miarę upływu czasu sytuacja pogarszała się. Otóż w 1927 roku Werner Heisenberg ogłosił słynną już dziś zasadę nieoznaczoności. Mówi ona, że nie można zmierzyć (wyznaczyć) równocześnie pewnych par wielkości fizycznych zwanych sprzężonymi. Do takich par należy, między

w lewo oraz liczba skoków w prawo. Istnieje

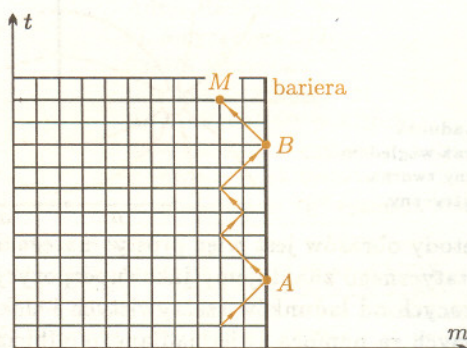
$$\frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!}$$

sposobów, na jakie pchła może wykonać skoki lądując w punkcie o współrzędnej m . Prawdopodobieństwo każdej sekwencji skoków jest takie samo i równe $1/2^N$. A zatem prawdopodobieństwo tego, że po N skokach pchła oddali się o m , wynosi:

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} \frac{1}{2^N}$$

Skomplikujmy teraz sytuację. Na drodze pchły umieścimy odbijającą barierę (*Ustawa o wychowaniu w trzeźwości*) w punkcie o współrzędnej m_1 ($0 < m_1 < N$). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po N skokach (w obecności bariery) pchła znajdzie się w punkcie o współrzędnej m (przy czym $-N \leq m \leq m_1$)? Jeśli pchła dotrze do bariery, to prawdopodobieństwo następnego skoku jest równe 1 – gdy jest to skok w lewo oraz 0 – gdy jest to skok w prawo. Symetria zagadnienia została złamana, prawdopodobieństwa różnych sekwencji skoków mogą być różne; zależy to od liczby odbić od bariery. Liczenie liczby trajektorii o jednakowym prawdopodobieństwie także wydaje się bardziej skomplikowane. Zanim więc zabierzemy się za rachunki, przyjmijmy prostą metodę obrazowania ruchów pchły. Będzie to dyskretny diagram czasoprzestrzenny (rys. 3). Na osi pionowej będziemy odkładać czas, na osi poziomej – położenie.

Rys. 3. Czasoprzestrzenny diagram ruchów pchły. Węzły sieci są jej możliwymi położeniami. Rysunek przedstawia fragment trajektorii kończącej się w punkcie M , po dwukrotnym odbiciu od bariery w punktach A i B .



Prawdopodobieństwo realizacji trajektorii pokazanej na rysunku 3 jest równe:

$$\frac{1}{2^{N-2}}, \text{ czyli } 4 \cdot \frac{1}{2^N},$$

ponieważ pchła znalazłszy się w punktach A i B skacze w lewo z prawdopodobieństwem nie $1/2$ jak poprzednio, lecz 1.

Narysujmy teraz na diagramie punkt M' będący zwierciadlanym odbiciem punktu M względem bariery. Oznaczmy przez m przestrzenną współrzędną punktu M . Przestrzenna współrzędna punktu M' jest wtedy równa $2m_1 - m$. Usuńmy teraz barierę i rozważmy takie trajektorie, które kończą się w punkcie M lub jego obrazie M' oraz mają tę miłą własność, że kształt łamanej AB jest zawsze taki sam, także kształt łamanej BM (ewentualnie BM') jest zawsze taki sam. Mówiąc, że kształty dwóch łamanych są jednakowe, rozumiemy tu albo identyczność łamanych, albo możliwość przeprowadzenia jednej w drugą przez zwierciadlane odbicie względem bariery. W przypadku trajektorii z rysunku 3 będą to trajektorie pokazane na rysunku 4.

Każdej trajektorii z dwukrotnym odbiciem od bariery w punktach A i B , kończącej się w punkcie M , odpowiadają cztery trajektorie przechodzące w nieobecności bariery przez punkty A i B , kończące

się w M lub M' , otrzymane z wyjściowej trajektorii metodą obrazów. Łatwo spostrzec, że jest to przyporządkowanie wzajemnie jednoznaczne. Jeśli nie ma bariery, to prawdopodobieństwo zrealizowania każdej z tych czterech trajektorii jest takie samo i równe $1/2^N$. Prawdopodobieństwo zrealizowania którejkolwiek z tych czterech trajektorii (w nieobecności bariery) jest zatem równe $4/2^N$, czyli tyle samo, ile wynosiło prawdopodobieństwo dla trajektorii z dwukrotnym odbiciem się od bariery.



Rys. 4. Trajektorie otrzymane z pomocą metody obrazów z trajektorii przedstawionej na rysunku 3.

a) trajektorie kończące się w M ,
b) trajektorie kończące się w M' będącym zwierciadlanym odbiciem punktu M .

Jeśli rozpatrzmy trajektorię z k -krotnym odbiciem od bariery w punktach A_1, \dots, A_k , to metoda postępowania będzie dokładnie taka sama. Prawdopodobieństwo zrealizowania takiej trajektorii wynosi:

$$\frac{1}{2^{N-k}} = 2^k \cdot \frac{1}{2^N}.$$

Usuńmy barierę i rozpatrzmy wszystkie trajektorie, które kończą się w punkcie M lub w jego obrazie M' , o takich samych kształtach łamanych $A_i A_{i+1}$ ($i = 1, \dots, k-1$) oraz $A_k M$ (albo $A_k M'$). Ponieważ w grę wchodzi k łamanych, które mogą przyjąć jedno z dwóch położen (po prawej lub po lewej stronie bariery), jest więc tych trajektorii 2^k , a ponieważ barierę usunęliśmy, zatem prawdopodobieństwo zrealizowania dowolnej trajektorii jest równe $1/2^N$. Wynika stąd, że prawdopodobieństwo zrealizowania

którejkolwiek ze wspomnianych k trajektorii wynosi $\frac{2^k}{2^N}$, czyli właśnie tyle, ile wynosiło prawdopodobieństwo zrealizowania trajektorii z k -krotnym odbiciem od bariery.

Wypływa stąd wniosek, że prawdopodobieństwo $P_N^{m_1}(m)$ wylądowania pchły w punkcie o współrzędnej m w obecności odbijającej bariery jest równe sumie prawdopodobieństw wylądowania pchły w tym punkcie lub w jego zwierciadlanym obrazie w nieobecności bariery. Ponieważ obraz końcowego punktu trajektorii pchły ma współrzędną $2m_1 - m$, prawdopodobieństwo to jest równe:

$$P_N^{m_1}(m) = P_N(m) + P_N(2m_1 - m).$$

Posługując się metodą obrazów możemy rozwiązać także nieco trudniejsze zagadnienie. Na drodze cząstki znajduje się bariera pochłaniająca. Jakie jest prawdopodobieństwo pochłonięcia cząstki najdalej w N -tym skoku? (Możemy wyobrazić sobie, że na drodze naszej skaczącej pchły znajduje się kiosk z piwem.)

Zagadnienie błądzenia przypadkowego uważane jest za model ruchów Browna, a zatem wiąże się również ze zjawiskiem dyfuzji. Rozważmy cząstkę brownowską poruszającą się wzdłuż prostej, wykonującą skoki o długości l z częstotliwością n . Przemieszczenie cząstki ml oznaczmy przez x . Rozważmy przedział o długości Δx dużo większej niż długość jednego skoku l i dużo mniejszej niż Nl .

innymi, pęd cząstki i jej położenie, czas życia cząstki i jej masa i wiele innych par wielkości. Jeżeli zmierzmy dokładnie położenie cząstki, to nie możemy znać w tym samym miejscu jej pędu. Można to nawet zrozumieć. Każdy pomiar położenia zaburza ruch cząstki, a tym samym zmienia jej prędkość. No bo na przykład: ustalimy położenie elektronu umieszczając na jego drodze bardzo wąską szczelinę. Im węższa szczelina, tym dokładniej wiemy, że elektron, który przeszedł przez szczelinę, miał w chwili przechodzenia dobrze określone położenie – właśnie położenie szczeliny. Pojawia się jednak od razu kłopot. Ze względu na naturę falową elektron przechodząc przez wspomnianą szczelinę ulega ugięciu i nie możemy już powiedzieć, jaki jest jego pęd czy prędkość. Zatrzymajmy się na tym przykładzie. Czy stwierdzenie, że nie znamy prędkości, oznacza, iż cząstka jej nie ma, czy też oznacza naszą nieudolność? Inaczej mówiąc, czy istnieje realnie, czyli niezależnie od nas, coś takiego jak prędkość cząstki, którą albo znamy, albo nie? A może jest sensowne mówić o prędkości tylko wtedy, gdy dokonujemy pomiaru?

Przyznaję Państwo, że zaczynamy się oddalać od tego, co uważamy za oczywiste. Otóż we wrześniu 1927 roku Niels Bohr na konferencji w Come przedstawił pogląd, według którego zjawiskom nie można przypisać realności niezależnie od obserwatora. Rola obserwatora staje się niezwykle ważna. Światło może być falą lub cząstką-fotonem zależnie od tego, w jakim doświadczeniu je badamy. Nie możemy powiedzieć, czy jest falą, czy cząstką, zanim nie dokonamy pomiaru. Wystąpienie Bohra spotkało się z bardzo silnym sprzeciwem Einsteina. Dyskusja między Bohrem i Einsteinem jest sama w sobie pasjonująca jako obraz ścierania się dwóch najwybitniejszych umysłów epoki. Einstein zaatakował najpierw zasadę nieoznaczoności. Na kongresach Solvaya w roku 1927 i w 1930 przedstawiał słynne doświadczenia myślowe, które miały wykazać sprzeczność tkwiącą w zasadzie nieoznaczoności. Bohr zdołał się obronić. Jako anegdotę można opowiedzieć, iż zdarzało się, że Einstein jednego dnia przygważdżał Bohra swoimi argumentami, ten zaś spędzał całą noc na pracy, aby przy śniadaniu następnego dnia mieć już gotową odpowiedź. Był to dla fizyki okres niezwykle płodny i pasjonujący. Einstein w końcu zrezygnował z wykazania sprzeczności logicznej tkwiącej, wedle niego, w mechanice kwantowej, ale usiłował wykazać, że jest ona niekompletna, to znaczy, że nie opisuje całej

rzeczywistości fizycznej. W 1935 roku opublikował wraz z Podolskim i Rosenem pracę, w której, jak mu się wydawało, wykazał, że mechanika kwantowa jest niekompletna. Koncepcja zwana do dziś jako paradoks EPR od pierwszych liter nazwisk autorów opierała się na następującym rozumowaniu:

*Jeżeli nie zakłócając w żaden sposób, czyli nie wykonując pomiaru, możemy przewidzieć wartość wielkości fizycznej w jakimś układzie, to mamy prawo powiedzieć, że wielkość ta istnieje rzeczywiście niezależnie od obserwatora. Jeżeli potrafimy przewidzieć wartość pędu cząstki w danym miejscu przestrzeni bez dokonywania pomiaru pędu tej cząstki, to cząstka ta ma rzeczywiście pęd niezależny od nas.

* Należy wykazać, że można zaprojektować doświadczenie, w którym bez dokonywania pomiaru pędu cząstki można określić dokładnie jego wartość. Będzie to dowód, że pęd cząstki jest wielkością niezależną od obserwatora, a więc, że istnieje obiektywnie.

Doświadczenie zaproponowane przez Einsteina i współpracowników przedstawię na przykładzie dwóch jednakowych kulek A i B ściśniętych sprężynką i związanych nitką. Przepalamy nitkę. Sprężynka oddala od siebie kulki. Są one jednakowe, więc lecą w przeciwnie strony z jednakową prędkością. Po odczekaniu dostatecznie długiego czasu, aby kulki oddaliły się od siebie i nie mogły już na siebie wpływać i wzajemnie się zakłócać, bo przecież sygnału nie można przesłać prędzej niż z prędkością światła, mierzymy prędkość kulki A z dowolnie dużą precyzją. Możemy nawet się zgodzić, że słuszna jest zasada nieoznaczoności i że w wyniku pomiaru pędu nie możemy znać położenia kulki A . Zgodnie z tą zasadą nie można bowiem zmierzyć z dowolną dokładnością prędkości i położenia. Ze względu na identyczność kulek A i B wiemy bez pomiaru, że kulka B biegnie w stronę przeciwną do ruchu kulki A z prędkością dokładnie taką samą jak prędkość kulki A . Czyli bez pomiaru prędkości kulki B znamy jej prędkość. Przeczy to interpretacji Bohra mechaniki kwantowej, która mówi, że nie można mówić o rzeczywistości fizycznej w oderwaniu od pomiaru. Einstein wyciągnął wniosek, że mechanika kwantowa jest niepełna i nie opisuje całej rzeczywistości.

W 1952 roku David Bohm zaproponował modyfikację mechaniki kwantowej. Być może, mówił, istnieją w teorii nieznanne nam parametry, tak zwane parametry

Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po wykonaniu N skoków w czasie $t = N/m$ cząstka znajduje się w przedziale $[x, x + \Delta x]$? Jest ono równe

$$P_N(x)\Delta x = P_N(m) \frac{\Delta x}{2l},$$

ponieważ m może przyjmować jedynie parzyste lub jedynie nieparzyste wartości. Dla bardzo dużych N i m dużo mniejszych od N rozkład dwumianowy asymptotycznie przechodzi w rozkład Gaussa. Dla cząstki Browna nieskrępowanej istnieniem jakichkolwiek barier otrzymamy gęstość prawdopodobieństwa

$$P_t(x) = \frac{1}{2(\pi Dt)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

natomiast dla cząstki poruszającej się w obecności bariery odbijającej, umieszczonej w punkcie o współrzędnej x_1 , jest ona równa

$$P_t^{x_1}(x) = \frac{1}{2(\pi Dt)^{1/2}} \left\{ e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(2x_1-x)^2}{4Dt}} \right\},$$

gdzie stała dyfuzji D jest określona jako

$$D = \frac{1}{2} ml^2.$$



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 711. Udowodnić, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$, $abc > 0$, to są dodatnie.

Rozwiązanie na str. 13

M 712. Nie posługując się wzorem Stirlinga udowodnić, że $80! > 10! \cdot 10^{100}$.

(Zadanie zaproponował P. Strzelecki)

Rozwiązanie na str. 12

M 713. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność $(5 - a^2 - b^2 - c^2)abc \leq 2$.

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Jarosław KULPA

F 387. Zgodnie z efektem Hawkinga, na skutek kreacji par cząstek elementarnych w silnym polu grawitacyjnym czarne dziury promieniają w sposób zbliżony do promieniowania ciała doskonale czarnego

o temperaturze $T = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM}$ i powierzchni $S = 4\pi R^2$, gdzie $R = \frac{2GM}{c^2}$ jest promieniem Schwarzschilda czarnej dziury o masie M (k oznacza stałą Boltzmana).

Oszacować, jaką minimalną masę powinny mieć czarne dziury powstałe we wczesnych okresach istnienia Wszechświata, tj. około $t_0 = 18$ mld lat temu, aby nie wypromieniowały do tej pory całej swojej energii.

Rozwiązanie na str. 12

F 388. W metodzie Millikana wyznaczania ładunku elementarnego zakłada się, że na kropelki oleju rozpylone w powietrzu działa tylko siła oporu związana z lepkością powietrza. Oszacować, dla jakich promieni kropelek siła oporu aerodynamicznego stanowi mniej niż $\varepsilon = 1\%$ siły oporu związanej z lepkością. Gęstość oleju $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$, współczynnik oporu aerodynamicznego przyjąć równy $c = 0,4$, lepkość powietrza $\eta = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Rozwiązanie na str. 12