Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1994

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Zadania z fizyki nr 181, 182

Redaguje Jerzy B. BROJAN

181. Cienka powłoka kulista o masie m i promieniu r znajdująca się w próżni i naładowana ładunkiem Q rozpadła się nagle na małe kawałeczki. Obliczyć prędkość uzyskaną przez odpryski w wyniku ich wzajemnego odpychania. Założyć jednorodny rozkład masy i ładunku.

182. Siła sprężystości wywierana przez sprężynę dana jest wzorem $F = kx$ (x – wydłużenie), przy czym stała sprężystości k maleje ze wzrostem temperatury. Udowodnić, że adiabatycznemu rozciąganiu tej sprężyny towarzyszy spadek temperatury.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1994

Przypominamy treść zadań:

177. Małe ciało porusza się na płaszczyźnie pod działaniem siły wywieranej przez nierozciągliwą nitkę o długości l, przymocowaną do niego. Drugi koniec nitki jest przesuwany w tej płaszczyźnie z prędkością v stałą co do wartości. Przedyskutować możliwe ruchy tego końca, prowadzące do osiągnięcia przez ciało w ciągu czasu t jak największej prędkości. Przyjąć, że w chwili początkowej ciało spoczywało.

178. Gdy na drodze równoległej wiązki światła spójnego umieścimy prostopadłą przeszkodę kołową, to w środku cienia rzucanego na ekran widoczny będzie jasny punkt. Wyjaśnić to zjawisko i oszacować średnicę tego jasnego obszaru, jeśli promień przeszkody wynosi 5 mm, odległość do ekranu – 1 m, a długość fali światła – 0,5 μm.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 169 (WT=2,00) i 170 (WT=3,10) z numeru 12/1993

Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,09
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	34,04
Andrzej Borowski – Aleksandrów Kujawski		31,64
Aleksander Surma	– Myszków	16,59

177. Gdy czas t jest krótki w porównaniu z l/v, prawdopodobnie najlepszą metodą rozpędzenia ciała jest szybka zmiana zwrotu prędkości końca nitki od kierunku prostopadłego do nitki do kierunku równoległego. „Pociągając" w ten sposób ciało można mu nadać prędkość bliską v, niezależnie od t. Mając do dyspozycji dłuższy czas możemy osiągnąć większą prędkość ciała. Oto jedna z możliwych metod: Niech koniec nitki porusza się stale wzdłuż prostej prostopadłej do początkowego kierunku nitki, dokonując zmiany zwrotu za każdym razem, gdy nitka wykona pół obrotu (obróci się o 180°). Początkowo ciało jest nieruchome, czyli względem układu związanego z poruszającym się końcem nitki ma prędkość v. Jego ruch po okręgu jest w tym układzie jednostajny, zatem zakreśli pół obrotu w czasie $\pi l/v$ osiągając prędkość $2v$ względem układu spoczywającego. Gdy koniec nitki zacznie się poruszać w przeciwną stronę, prędkość ciała względem układu związanego z końcem nitki będzie wynosiła $3v$ i następne pół obrotu zakreśli w czasie $\pi l/3v$. Po tym czasie będzie miało prędkość $4v$, następne pół obrotu zajmie czas $\pi l/5v$ ... Jeśli czas t jest długi, to możemy skorzystać z przybliżenia

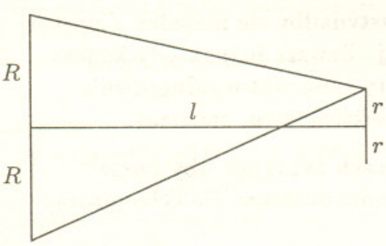
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \approx \frac{1}{2}\ln n$$ i znaleźć liczbę półobrotów n z tożsamości $\frac{\pi l}{2v}\ln n \approx t$.

Ponieważ końcowa prędkość ciała wynosi $v_k = 2nv$, więc otrzymujemy $v_k \approx 2v \exp\left(\frac{2vt}{\pi l}\right)$.

Gdy prędkość ciała stanie się już dość duża, jeszcze lepszą metodą rozpędzania jest ciągnięcie nitki stale wzdłuż niej (kierunek „od ciała"). Ruch ciała będzie wtedy zachodził w przybliżeniu po okręgu z rosnącą prędkością v', a siła napięcia nitki będzie wynosiła w przybliżeniu $F = m(v')^2/l$. Praca nitki w czasie Δt jest równa $Fv\Delta t$, a przyrównując ją do zmiany energii kinetycznej i całkując otrzymujemy $v_k = \mathrm{const}\cdot\exp\left(\frac{vt}{l}\right)$.

Jak widać, mnożnik czasu w wykładniku ma teraz większą wartość niż w metodzie poprzedniej, czyli rozpędzanie zachodzi szybciej.

Powyższa dyskusja jest daleka od kompletności i ścisłości matematycznej (zwłaszcza w ostatnim punkcie), ale autor ma nadzieję, że uniknął istotnych błędów.



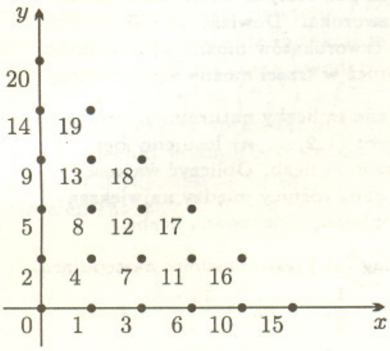
178. Przyczyną zjawiska jest równość dróg od poszczególnych punktów brzegu koła do środka cienia, skąd wynika, że w środku cienia fale ugięte na brzegu interferują konstruktywnie. Aby ocenić promień r jasnego obszaru, przyjmijmy, że kończy się on tam, skąd różnica odległości do przeciwległych punktów brzegu koła jest równa $\frac{1}{2}\lambda$. Oznaczając promień koła przez R, a odległość do ekranu przez l (rys.) mamy równanie

$$\sqrt{l^2 + (R+r)^2} - \sqrt{l^2 + (R-r)^2} = \frac{1}{2}\lambda,$$

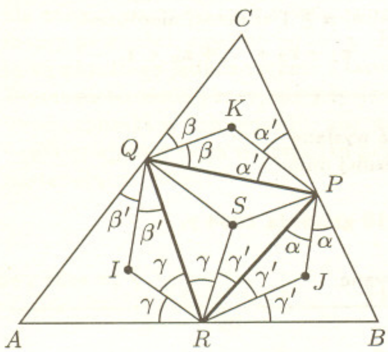
skąd, zakładając $l \gg R$, otrzymujemy $r = \frac{l\lambda}{4R} = 0{,}025$ mm, czyli średnica wynosi 0,05 mm.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 269 (WT=1,81) i 270 (WT=3,16) z numeru 11/1993

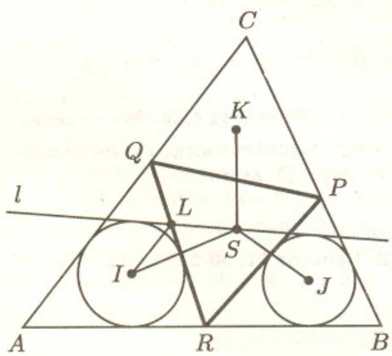
Jan Kraszewski	– Legnica	42,50
Mirosław Matlęga	– Skoczów	40,30
Tomasz Kulpa	– Katowice	38,94
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	36,64



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania z matematyki nr 283, 284

Redaguje Marcin E. KUCZMA

283. Wyznaczyć wszystkie liczby dodatnie a, dla których funkcja
$$f(x) = ax(1-x)$$
ma następującą własność: istnieje taka liczba $c \in (0;1)$, że
$$f(f(c)) = c \neq f(c).$$

284. Na bokach AB i AC trójkąta ostrokątnego ABC obrano odpowiednio punkty M i N. Okręgi, których średnicami są odcinki BN i CM, przecinają się w punktach P i Q. Udowodnić, że ortocentrum (punkt przecięcia wysokości) trójkąta ABC leży na prostej PQ.

Zadanie **284** zaproponował pan Henryk Pawłowski z Torunia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1994

Przypominamy treść zadań:

279. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian $P(x,y)$ o następujących własnościach:
(1) Jeśli x, y są liczbami całkowitymi nieujemnymi, to wartość $P(x,y)$ też jest liczbą całkowitą nieujemną.
(2) Dla każdej liczby całkowitej $z \geq 0$ równanie $P(x,y) = z$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych $x, y \geq 0$.

280. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC obrano odpowiednio takie punkty P, Q, R, by trójkąt PQR był równoboczny. Okręgi wpisane w trójkąty ARQ, BPR, CQP mają środki odpowiednio w punktach I, J, K. Załóżmy, że $|IR| = |JR|$. Wykazać, że:
(a) $|IQ| = |KQ|$ oraz $|JP| = |KP|$;
(b) trzy wspólne styczne zewnętrzne dla par rozważanych okręgów wpisanych (nie zawierające boków trójkąta ABC) przecinają się w jednym punkcie.

279. Numerujemy wszystkie punkty kratowe (x,y) o współrzędnych całkowitych $x, y \geq 0$ tak, jak pokazuje rysunek 1; punkt (x,y) otrzymuje numer
$$z = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + y.$$
Ten wzór definiuje wielomian $P(x,y)$ o żądanych własnościach!

280. (a) Oznaczmy:
$$|\angle JPB| = |\angle JPR| = \alpha, \qquad |\angle KPC| = |\angle KPQ| = \alpha',$$
$$|\angle KQC| = |\angle KQP| = \beta, \qquad |\angle IQA| = |\angle IQR| = \beta',$$
$$|\angle IRA| = |\angle IRQ| = \gamma, \qquad |\angle JRB| = |\angle JRP| = \gamma'.$$
Każdy kąt wewnętrzny trójkąta PQR ma miarę 60°; zatem
$$2(\alpha+\alpha') = 2(\beta+\beta') = 2(\gamma+\gamma') = 120^\circ.$$
Istnieje wobec tego półprosta o początku R, tworząca z bokami RQ i RP odpowiednio kąty γ i γ'. Odłóżmy na niej odcinek RS długości $|RS| = |RI| = |RJ|$ (rys. 2). Punkt S jest symetryczny do punktu I względem prostej QR oraz symetryczny do J względem prostej PR. Tak więc $|\angle SPR| = \alpha$, $|\angle SQR| = \beta'$, skąd
$$|\angle SPQ| = 60^\circ - \alpha = \alpha', \qquad |\angle SQP| = 60^\circ - \beta' = \beta,$$
co pokazuje, że punkt S jest również symetryczny do K względem prostej PQ. Zatem
$$|IQ| = |SQ| = |KQ| \qquad \text{oraz} \qquad |JP| = |SP| = |KP|.$$

(b) Poprowadźmy przez punkt S prostą l równoległą do PQ; przetnie ona odcinek QR w punkcie L (rys. 3). Prosta QR jest symetralną odcinka SI, wobec czego
$$|\angle ILR| = |\angle SLR| = |\angle PQR| = 60^\circ;$$
zatem półprosta $LI^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta między odcinkiem LR i przedłużeniem odcinka SL. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt ARQ, styczny do prostej QR, jest więc także styczny do prostej l.

Analogicznie wykazujemy, że okrąg wpisany w trójkąt BPR jest styczny do tej prostej (korzystając z tego, że prosta PR jest symetralną odcinka SJ). A skoro – jak stwierdziliśmy w części (a) – także prosta PQ jest symetralną odcinka SK, zatem proste przechodzące przez S i równoległe do QR oraz PR są pozostałymi dwiema prostymi, o które chodzi, S zaś jest wspólnym punktem tych trzech prostych.

ERRATA do tekstu: **Klub 44** w *Delcie* 2/1994 (roczne omówienie matematycznej ligi zadaniowej):
str. 14, lewa szpalta, szkic rozwiązania zadania **255**:
ostatni wiersz przekształcanego wzoru (tuż nad rysunkiem) należy zastąpić przez dwuwiersz:
$$= S^{-1} \cdot 4\sqrt{2}\,R \cdot \big(\mathrm{pole}(CBE) + \mathrm{pole}(CDE)\big) =$$
$$= S^{-1} \cdot 4\sqrt{2}\,R \cdot \big(\mathrm{pole}(BCD) + \mathrm{pole}(BED)\big) = 4\sqrt{2}\,R.$$
Przepraszam Waldka Pompe (autora przytaczanego rozwiązania) oraz wszystkich Czytelników *Delty* za tę pomyłkę.

Marcin E. KUCZMA