Dwugłos o nieskończoności

Czy istnieje największa liczba, to jest większa od wszystkich innych? Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Szczególnie łatwo tę odpowiedź uzasadnić posługując się systemem pozycyjnym, do którego jesteśmy przyzwyczajeni „od zawsze". Dopisując zero na końcu napisu przedstawiającego liczbę całkowitą mnożymy ją przez 10, a zera możemy dopisywać w „nieskończoność".

Od początku historii ludzkość borykała się z problemami nieskończoności. Bardzo szybko zaczęto odróżniać nieskończoność, jaką reprezentuje nieskończony proces (np. o takiej nieskończoności jest mowa w poprzednim akapicie, albo w dziecięcym *a ja zawsze o jeden więcej*), od nieskończoności, jako ilości jakichś obiektów (np. liczba punktów prostej). Łatwiej się zresztą godzono na istnienie tej pierwszej.

Początkowo sądzono, że nieskończoności nie można policzyć. Później złagodzono ten warunek – można przecież liczyć liczby naturalne, gdyż wiemy, jaka z nich ma być wymieniona po każdej z nich, jako kolejna. Niemniej jednak pogląd, że nieskończoność można zobaczyć gdzieś w przyrodzie, jest błędny, choć nadal w świadomości społecznej pokutuje. Mówi się wtedy o ziarnkach piasku na pustyni, kroplach wody w oceanie czy gwiazdach na firmamencie. Porównania te biorą się stąd, że realnie człowiek istotnie nie może policzyć ani kropel w oceanie, ani ziarenek piasku na pustyni. Nie wystarczy mu po prostu czasu.

A czy naprawdę nieskończoność jest potrzebna w praktyce? Jak duże liczby naturalne mają się do przyrody? Korzystając z notacji wykładniczej jest bardzo łatwo napisać naprawdę dużą liczbę, na przykład 10^{100}. W systemie dziesiętnym jest to jedynka ze stoma zerami. Zobaczmy, jak ta liczba ma się do przyrodniczych wyobrażeń nieskończoności, o których mówiliśmy powyżej. Niech kropla wody ma średnicę 2 mm, to znaczy jej objętość wynosi około 4 mm^3. Objętość wody w oceanach szacuje się na 1370 mln km^3, a więc to „tylko" około $3 \cdot 10^{26}$ kropli. Dla matematyka przyzwyczajonego do nieskończoności to nieduża liczba, chociaż to trójka z dwudziestoma sześcioma zerami. Możemy spróbować wyrazić objętość wód oceanicznych przez liczbę molekuł wody. Jedna kropla wody to około $2 \cdot 10^{-4}$ mola wody, a więc zawiera w przybliżeniu $2 \cdot 10^{19}$ molekuł. Stąd otrzymujemy $6 \cdot 10^{45}$ molekuł wody w oceanach. Ciągle mało w porównaniu z 10^{100}. Powierzchnia Ziemi mierzona w mm^2 to znowu „zaledwie" $5 \cdot 10^{20}$. Obliczając objętość Wszechświata w mm^3 też nie przekroczymy 10^{100} (a w angstremach sześciennych?). Ale takie rachunki nie mają żadnego znaczenia fizycznego. Tak dużych ilości rzeczy na świecie nie ma i liczba 10^{100} przekracza wszystko, co można policzyć i zmierzyć. Napotykamy tu różnicę między fizyką i matematyką. Dla matematyka jest to taka sama liczba jak 5 czy 28, to znaczy jedna z nieskończonego zbioru liczb skończonych. Realność czy nierealność fizyczna pojęć nie interesuje dzisiejszego matematyka. Porusza się on w świecie abstrakcji, w którym poprawność rozumowania i niesprzeczność teorii są ważniejsze niż ich odniesienia do rzeczywistości.

Pojęcie nieskończoności uzyskało w matematyce swój precyzyjny sens. Ta pierwsza nieskończoność – nieskończenie długo trwający proces – ma swój symbol: ∞, coś w rodzaju położonej ósemki wprowadzonej do matematyki w 1655 roku przez angielskiego matematyka Johna Wallisa. Nazywa się ją nieskończonością potencjalną.

Tych innych nieskończoności jest (nieskończenie zresztą) wiele i też mają one (tym razem bogato rozbudowany) system oznaczeń.

Z praktycznego natomiast punktu widzenia liczba 10^{100} to nieskończoność. I ten, kto myśli o niej jak o nieskończoności, ma, w gruncie rzeczy, dobrą intuicję.

Jan KALINOWSKI

W naszych artykułach zwykle punktem wyjścia jest doświadczenie. Dziś wybrałem eksperyment grupy Francuzów, którego wyniki opublikowano w sierpniu 1981 r. Piszę o nim na końcu, ponieważ chciałem Państwa przygotować do docenienia tych kilku zdań, jakie napisali w standardowym streszczeniu, które umieszcza się na początku każdej naukowej publikacji. Otóż Alain Aspect, Philippe Grangier i Gerard Roger piszą:
„Nasze wyniki są w doskonałej (*excellent*) zgodzie z przewidywaniami mechaniki kwantowej, silnie naruszają uogólnioną nierówność Bella i wykluczają całą klasę realistycznych lokalnych teorii".
Co z tego wynika? Mechanika kwantowa święci sukcesy. Zgadza się z doświadczeniem. Jest niedeterministyczna, nie jest lokalna, nie uznaje niezależnej rzeczywistości fizycznej w oderwaniu od pomiaru.
I to wszystko wzbudza w nas sprzeciw jako przeczące zdrowemu rozsądkowi. Niewątpliwie wiele jeszcze pracy trzeba włożyć, aby właściwie zrozumieć i zinterpretować mechanikę kwantową. Jest ona wspaniałym narzędziem, które działa, ale nie do końca wiemy, co to znaczy. Ale to dobrze, tak jest ciekawiej. Naruszone są zasady zdrowego rozsądku? Nie szkodzi – kierujmy się jednak nim dalej. Claude Bernard mawiał:
„Wielką sztuką jest zmieniać swoje poglądy i idee w miarę postępu nauki", a Henry David Thoreau stwierdzał:
„Prawdziwa wiedza polega na zdawaniu sobie sprawy z tego, co wiemy, że wiemy i z tego, co nie wiemy, że nie wiemy"
A od siebie dodam, że my jeszcze dużo nie wiemy, ale to, co wiemy, jest pasjonujące.

Powierzchnia oceanów – *jeszcze większa. Williams oblicza, że gdyby krople wody stanowiące powierzchnię oceanów ułożyć w słup, to byłby on bardzo wysoki.*

Rzeki *płyną do swych ujść i posiadają malownicze brzegi. Najdłuższe rzeki: Nil (historyczna egipska rzeka), Wołga (w Rosji) i kilka innych. Reinhardt oblicza, że gdyby z wszystkich rzek zrobić jedną, byłaby ona wielka.*

Antoni Słonimski i Julian Tuwim, *W oparach absurdu.*

Między innymi wynalazł on płyn do wywabiania przykrych wspomnień, banknoty z poziomą ósemką, wyobrażającą nieskończenie wielką sumę pieniędzy, trzy sposoby kolorowania mgły na mile dla oka kolory, a także specjalny proszek, którym można posypywać chmury i odciskać je w odpowiednich formach, dzięki czemu uzyskują trwałe, solidne kształty.

Stanisław Lem, *Dzienniki gwiazdowe Ijona Tichego; Podróż dwunasta.*

Na sąsiedniej stronie można przeczytać artykuł Jana Kalinowskiego. Czytelnikowi trudno zapewne byłoby nie zgodzić się z przedstawionym w owym tekście poglądem, że z fizycznego czy może raczej zdroworozsądkowego punktu widzenia zbędne są liczby większe niż 10^{100}. Istotnie, gdy liczymy ziarnka piasku w hipotetycznej sferze Archimedesa (o promieniu równym odległości Ziemi od widzialnych gwiazd), albo wszystkie molekuły wody w oceanach, albo liczbę lat potrzebnych do starcia na proch kamienia o rozmiarach 1 km^3, zbudowanego z materiału milion razy twardszego od diamentu, poprzez pocieranie go ręką raz na milion lat, albo nawet liczbę wszystkich atomów we Wszechświecie, to rzeczywiście w wyniku dostajemy liczby mniejsze (i to dość wyraźnie) od 10^{100}.

Wybraźnia ludzka potrafi jednak być zawodna. Nie wykorzystując wcale tak rozbudowanych środków opisu, jak ogromne odcinki czasu, supertwarde głazy, czy wszystkie atomy Wszechświata, możemy w bardzo codziennych sytuacjach napotkać liczby znacznie większe niż 10^{100}. Odwołajmy się na początek do prostej kombinatoryki i spytajmy, na ile sposobów można usadzić 80 pasażerów w jednym wagonie kolejowym drugiej klasy (który, jak wie każdy, kto choć trochę w czasie wakacji podróżuje, ma 10 przedziałów po 8 miejsc). Odpowiedź zna każdy uczeń: sposobów jest $80! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 80$. Ta liczba jest w przybliżeniu równa około $7,1569\ldots \times 10^{118}$ i wyraźnie przekracza ową fizyczną barierę 10^{100}.

Do obliczenia przybliżonej wartości silni wygodnie jest użyć wzoru Stirlinga:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Zapytajmy teraz o inną prostą kwestię: na ile sposobów można wybrać 1000 mieszkańców milionowego miasta i następnie rozmieścić ich na tysiącu ponumerowanych miejsc w ekspresie wyruszającym, na przykład, z Warszawy do Zakopanego. Znów, odpowiedź zna każdy uczeń ogólniaka. Wszystkich sposobów jest

$$\binom{1\,000\,000}{1000} \cdot 1000! = \frac{1\,000\,000!}{999\,000!},$$

czyli mniej więcej

$$6,0673297\ldots \times 10^{5999}.$$

W układzie dziesiątkowym do zapisania tej liczby potrzeba okrągłych sześciu tysięcy cyfr.

Pomyślmy teraz o kasynie w Las Vegas i wyobraźmy sobie, że raz do roku pojawia się tam gracz, który ma w kieszeni 100 dolarów i chciałby je stawiać (po jednym dolarze) na czerwone lub czarne do momentu, gdy uda mu się uciułać milion dolarów, albo do momentu, gdy przegra wszystko.

Ruletka w Las Vegas ma 38 pól: po 18 czarnych i czerwonych oraz 2 zielone. Gdy stawiamy na czarne lub czerwone, to w przypadku wygranej odzyskujemy podwojoną stawkę, a w przeciwnym razie tracimy stawkę. Prawdopodobieństwo wygranej w pojedynczej grze jest równe $\frac{18}{38} < \frac{1}{2}$.

Student trzeciego roku matematyki, który zetknął się z zadaniem o ruinie gracza oraz umie obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej o rozkładzie geometrycznym, powinien bez większego kłopotu stwierdzić, że średnio rzecz biorąc trzeba poczekać nieco dłużej niż 10^{23000} lat, zanim jeden z takich graczy opuści kasyno z milionem dolarów w kieszeni (dla porównania: wiek Wszechświata to około 18×10^9 lat). Swoją drogą, do policzenia owego średniego czasu oczekiwania na wzbogacenie się jednego z graczy trzeba jedynie znać wzór na prawdopodobieństwo całkowite i umieć sumować skończone i nieskończone ciągi geometryczne – może więc Czytelnicy zechcieliby samodzielnie sprawdzić powyższy wynik?

A gdy wkroczy się w czysto już matematyczny świat stałych występujących w rozmaitych nierównościach czy dajmy na to, w teorii liczb, to spotkać można tam prawdziwe liczby-potwory. O jednej z nich chcę tu opowiedzieć.

Otóż, dokładnie 150 lat temu Catalan postawił hipotezę, że wśród wszystkich potęg liczb naturalnych (o wykładnikach 2, 3, 4,...) jedyne dwie kolejne liczby naturalne to $8 = 2^3$ oraz $9 = 3^2$. Mówiąc inaczej, wedle Catalana równanie

$$(*) \qquad x^n - y^m = 1, \qquad x, y, n, m \in \mathbf{N}, \quad m, n \geq 2$$

nie ma innych rozwiązań niż $x = m = 3$, $y = n = 2$.

Swoje przypuszczenie Catalan sformułował w liście do Crelle'a, wydawcy słynnego *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Ów list został opublikowany w 29 tomie tego czasopisma w 1844 roku.

Hipoteza ta do dziś stanowi otwarty problem teorii liczb. Ogromny krok na drodze do jego rozwiązania uczynił w połowie lat siedemdziesiątych naszego wieku holenderski matematyk Robert Tijdeman, który wykazał, że jeśli liczby x, y, m, n stanowią rozwiązanie równania $(*)$, to największa z nich nie przekracza pewnej, jak się ładnie mówi, efektywnie obliczalnej stałej C. Wkrótce potem pojawiły się rozmaite szacowania wielkości owej stałej. W 1976 roku M. Langevin obliczył, że

$$C \leq \exp(\exp(\exp(\exp(730)))).$$

Gdy zechce się napisać, ile cyfr ma liczba cyfr prawej strony tej nierówności, to trzeba wypisać liczbę, która będzie mieć dużo więcej niż 10^{100} cyfr. Sytuacja nieco się poprawi, gdy ustalimy wykładniki $m, n \geq 3$. Jak R. Baker wyprowadził z twierdzenia Thue, Siegela i Rotha, czwórka liczb m, n, x, y spełniających równanie $(*)$ musi też spełniać warunek

$$\max(x, y) \leq$$
$$\leq \min\left(\exp\exp\{(5n)^{10} m^{10m^3}\}, \exp\exp\{(5m)^{10} n^{10n^3}\}\right).$$

Z praktycznego punktu widzenia wszystkie te oszacowania są całkowicie bezużyteczne. Gdyby bowiem ktoś chciał zaprząc wykonujący miliard zmiennoprzecinkowych operacji w ciągu sekundy komputer CRAY do sprawdzenia, czy w zbiorze C^4 wszystkich czwórek liczb naturalnych z przedziału $[1, C]$ nie ma przypadkiem wyjątków od hipotezy Catalana, to musiałby dysponować czasem, przy którym wiek Wszechświata wydaje się być nieporównanie krótszy niż mrugnięcie oka.

Zamiast więc tracić czas na zapisywanie papieru dużymi liczbami, lepiej od razu zabrać się do dowodzenia hipotezy Catalana – geniuszom może na to (przypadkiem) wystarczyć ludzkiego życia.

Paweł STRZELECKI