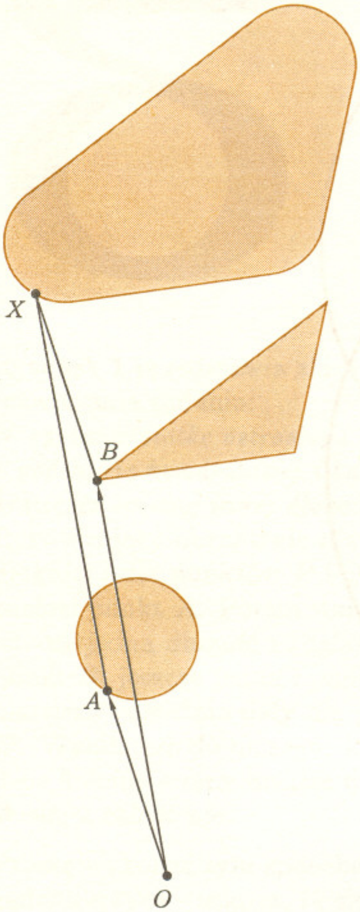
Dodawanie zbiorów



ale nie takie zwyczajne (gdzie sumą jest zbiór mający wszystkie elementy dodawanych zbiorów), lecz określone za pomocą wektorów, jest ważnym narzędziem teorii zbiorów wypukłych (bardzo od kilkunastu lat modnej).

Określa się je w następujący sposób. Obieramy na płaszczyźnie punkt O. Sumą zbiorów $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nazywamy zbiór wszystkich punktów X, dla których istnieją takie punkty $A \in \mathbf{A}$ i $B \in \mathbf{B}$, że $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Na rysunku dodaliśmy koło do trójkąta.

Jak łatwo zauważyć, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. Łatwo też zauważyć, że wynik dodawania zależy od tego, gdzie obraliśmy punkt O. Zależy, ale nie bardzo – wyniki dodawania za pomocą różnych punktów O i O' są figurami przystającymi, a nawet więcej: można jeden z nich nałożyć na drugi za pomocą przesunięcia o wektor $\overrightarrow{OO'}$ (proszę sprawdzić!). Wprowadzając dla figur $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}$, które można nałożyć przez przesunięcie, symbol $\mathbf{F} \cong \mathbf{G}$ możemy badać własności algebry takich zbiorów, czyli struktury $(\mathcal{X}, +, \cong)$, gdzie $\mathcal{X}$ to rodzina wszystkich figur, powiedzmy, płaszczyzny. Jest to algebra (jak już zauważyliśmy) przemienna, bo $\mathbf{A} + \mathbf{B} \cong \mathbf{B} + \mathbf{A}$. A czy jest to algebra łączna, tzn. czy dla dowolnych $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \cong \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}),$$

albo, czy jest monotoniczna, tzn. czy istnieje taka figura $\mathbf{D}$, że

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \supset \mathbf{D} \cong \mathbf{A}?$$

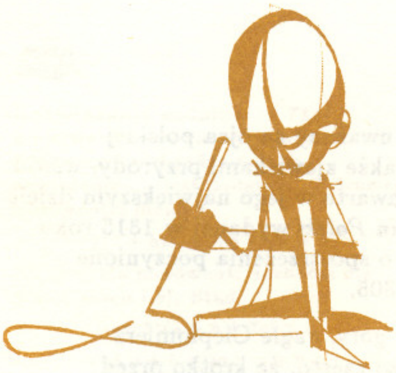
Łatwo wymyślić dalsze podobne pytania.

Można też badać dodawanie zbiorów wypukłych (bo dla nich to dodawanie zostało wymyślone). Na przykład, czy suma zbiorów wypukłych jest zawsze zbiorem wypukłym? Tu też nasuwają się dalsze pytania. Polecamy te badania jako temat do samodzielnej pracy naukowej – w szczególności na Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki.

Prenumerata „Delty"
za okres:

Prenumerata „Delty"
za okres:

Prenumerata „Delty"
za okres:



Komentarze Minkowskiego do nierówności Brunna zainteresowany Czytelnik odnajdzie w jego książce *Geometrie der Zahlen* wydanej w 1910 roku w Lipsku i Berlinie już po śmierci autora.

Przykładem bardzo ważnego twierdzenia dotyczącego dodawania zbiorów jest nierówność Brunna–Minkowskiego–Lusternika. Sformułujemy ją w szczególnym przypadku.

Jeśli A i B są (płaskimi) figurami wypukłymi, to

$$\sqrt{|A+B|} \geq \sqrt{|A|} + \sqrt{|B|},$$

gdzie przez $|F|$ oznaczyliśmy powierzchnię figury F.

Analogiczna nierówność zachodzi także dla trójwymiarowych brył wypukłych. Mianowicie,

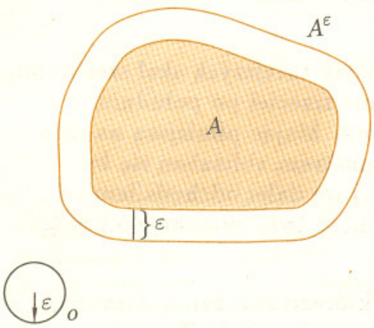
Jeżeli A i B są bryłami wypukłymi, to

$$\sqrt[3]{|A+B|} \geq \sqrt[3]{|A|} + \sqrt[3]{|B|},$$

gdzie przez $|F|$ oznaczyliśmy tym razem objętość bryły F.

W takiej właśnie formie udowodnił tę nierówność Brunn w 1887 roku. Minkowski znalazł wszystkie przypadki, kiedy zachodzi równość. Wreszcie, w 1935 roku, Lusternik wykazał dosyć zaskakujący fakt: udowodnił mianowicie, że powyższe nierówności zachodzą dla dowolnych, byle tylko ograniczonych i domkniętych zbiorów A i B, czyli żadne założenie dotyczące wypukłości nie jest potrzebne.

Pięknym zastosowaniem powyższej nierówności jest dowód tak zwanej nierówności izoperymetrycznej. Otóż problem jest następujący. Rozważmy wszystkie figury o danym obwodzie. Która z nich ma największą powierzchnię? Wydaje się, że koło, tylko jak to udowodnić? Rozwiążemy ten problem przy dodatkowym założeniu, że interesują nas tylko figury wypukłe, to znaczy udowodnimy następujące



Twierdzenie. *Wśród figur wypukłych o danym obwodzie największe pole ma koło.*

Dowód: Weźmy figurę wypukłą A. Niech r będzie równe obwodowi A podzielonemu przez 2π. Mamy wykazać, że koło o tym samym obwodzie co figura A (czyli po prostu koło o promieniu r) ma nie mniejszą od A powierzchnię. Trzeba więc udowodnić, że

$$|A| \leq \pi r^2.$$

Dodajmy do figury A w sposób algebraiczny koło o malutkim promieniu ε i środku w punkcie O. W wyniku tego dodawania otrzymamy figurę A^ε złożoną ze wszystkich punktów płaszczyzny oddalonych od A co najwyżej o ε. Nierówność Brunna–Minkowskiego–Lusternika przyjmuje teraz postać

$$\sqrt{|A^\varepsilon|} \geq \sqrt{|A|} + \sqrt{\pi\varepsilon^2}$$

albo równoważnie

$$\frac{\sqrt{|A^\varepsilon|} - \sqrt{|A|}}{\varepsilon} \geq \sqrt{\pi}.$$

Oznaczając $f(\varepsilon) = |A^\varepsilon|$ mamy więc

$$\frac{\sqrt{f(\varepsilon)} - \sqrt{f(0)}}{\varepsilon} \geq \sqrt{\pi},$$

a zatem, przechodząc do granicy przy $\varepsilon \to 0$ dostaniemy $(\sqrt{f})'(0) \geq \sqrt{\pi}$, czyli

$$\frac{1}{2\sqrt{f(0)}} f'(0) \geq \sqrt{\pi}.$$

Otóż $f(0) = |A|$. Natomiast $f'(0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{|A^\varepsilon| - |A|}{\varepsilon}$. Licznik ułamka jest powierzchnią paska okalającego figurę A. Jest to pasek o szerokości ε i długości w przybliżeniu równej obwodowi A, czyli $2\pi r$. Zatem powierzchnia tego paska jest równa w przybliżeniu $2\pi r \cdot \varepsilon$, a stąd $f'(0) = 2\pi r$. Otrzymaliśmy więc nierówność

$$\frac{1}{2\sqrt{|A|}} 2\pi r \geq \sqrt{\pi},$$

skąd

$$|A| \leq \pi r^2,$$

co kończy dowód.

Powyższa nierówność prawdziwa jest dla dowolnych, nie tylko wypukłych, figur płaskich. Jest tylko jeden drobiazg: przy rozpatrywaniu dowolnych figur trzeba wiedzieć, co to jest powierzchnia i obwód, a to już nie jest takie proste. Nierówność izoperymetryczna jest także prawdziwa dla brył; prawdą jest mianowicie, że wśród brył o danej powierzchni największą objętość ma kula.

M.K. i P.H.