O potęgach dwójki

Paweł STRZELECKI

Zaczniemy od sformułowania ciekawego problemiku.

Zadanie. Rozpatrzmy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ złożony z pierwszych cyfr kolejnych potęg dwójki:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ldots$$

Czy w ciągu tym pojawi się kiedykolwiek siódemka?

Zadanie to (i różne jego warianty) można odnaleźć w wielu miejscach, np. w artykule Zbigniewa Marciniaka *Spacerujący matematyk* (*Delta* 7/1991) czy w słynnym podręczniku W.I. Arnolda *Równania różniczkowe zwyczajne*. Na ogół towarzyszą mu pewne wskazówki czy udowodnione fakty pomocnicze. Autor niniejszego tekstu nie zna jednak miejsca, gdzie wspomniane zadanie można znaleźć w towarzystwie kompletnego rozwiązania, takiego w stylu „kawę na ławę". Spróbujmy temu zaradzić.

Na początek rozwiązanie rozpaczliwe: za pomocą ołówka i kartki papieru albo nieco nowszych wersji tego narzędzia (dobry kalkulator? komputer?) Wytrwały Czytelnik łatwo sprawdzi, że

$$2^{46} = \mathbf{7}0\,368\,744\,177\,664.$$

Eksperymentując dalej można stwierdzić, na przykład, że siódemka jest pierwszą cyfrą liczb 2^{56}, 2^{66}, 2^{76}, 2^{86} i 2^{96} (ale 2^{106} ma za pierwszą cyfrę ósemkę...). Strasznie to jednak niezdarny sposób.

Pora na rozwiązanie w miarę eleganckie, pozwalające na wyciągnięcie wielu wniosków. Na początek trzeba, oczywiście, zrozumieć, co to właściwie znaczy, że 7 jest pierwszą cyfrą liczby 2^n. Odpowiedź jest łatwa: 7 jest pierwszą cyfrą liczby 2^n wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $k\in\mathbf{N}$ mamy $7\cdot 10^k < 2^n < 8\cdot 10^k$. Aby otrzymać prostszy, równoważny zapis, logarytmujemy te nierówności stronami (przy podstawie 10); daje to $k+\log 7 < n\log 2 < k+\log 8$. Ponieważ $0<\log 7<\log 8<1$, to k jest częścią całkowitą liczby $n\log 2$, skąd ostatecznie

$$\log 7 < n\,\log 2 - [n\,\log 2] < \log 8\,.$$

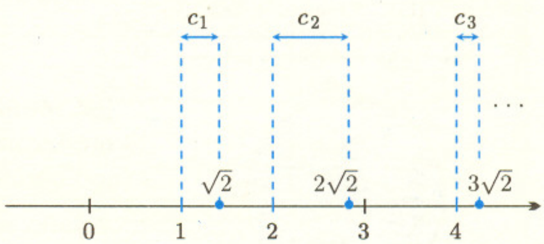
Żeby rozwiązać zadanie z początku artykułu, wystarczy teraz skojarzyć ze sobą kilka znanych faktów.

Lemat 1. *Liczba* $\log 2$ *jest niewymierna.*

Lemat 2. *Jeśli liczba x jest niewymierna oraz $c_n := nx-[nx]$, to dla dowolnych a i b spełniających $0\le a<b\le 1$, nieskończenie wiele wyrazów ciągu c_n leży w przedziale (a,b).*

Zanim podamy dowody lematów, popatrzmy na ich konsekwencje. Po pierwsze, z Lematu 2 zastosowanego dla $x=\log 2$, $a=\log 7$, $b=\log 8$ wynika, że siódemka jest pierwszą cyfrą nieskończenie wielu potęg dwójki. Jeśli zastosujemy Lemat 2 dla $x=\log 2$, $a=\log(77)-1$, $b=\log(78)-1$, pamiętając, iż $1=[\log 77]=[\log 78]$, to przekonamy się, że na początku zapisu dziesiętnego liczby 2^n mogą stać również dwie siódemki. Rozumując podobnie nietrudno stwierdzić, że na początku zapisu dziesiętnego liczby 2^n może wystąpić dowolny skończony ciąg cyfr: 1994 albo 1234, albo 567890, itd.... Dla niedowiarków prezentujemy na końcu niniejszego artykułu kalendarz ważnych dat zestawionych z odpowiednimi potęgami dwójki.

stanowią podstawowy element budowy „mózgu" kalkulatora lub zegarka. Z kolei tranzystory z wysoką ruchliwością elektronów (*High-Electron-Mobility-Transistors*) powszechnie wykorzystywane są do wzmacniania sygnału w antenach satelitarnych. „Sercem" tych tranzystorów jest kondensator, którego jedną okładkę stanowi półprzewodnik (Si w strukturze MOS-FET, GaAs w strukturze HEMT), a rolę dielektryka spełnia materiał o szerokiej przerwie energetycznej, odpowiednio SiO_2 i $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$. Przy odpowiedniej polaryzacji kondensatora w półprzewodniku – przy granicy z dielektrykiem – pojawiają się elektrony, które mogą poruszać się swobodnie jedynie w płaszczyźnie złącza. Dla pewnych szczególnych wartości strumienia pola magnetycznego, przypadającego na jeden elektron, elektrony ulegają przemianie w **anyony** – złożone kwazicząstki, w których skład wchodzi kwazielektron i całkowita liczba kwantów strumienia pola magnetycznego. I jeszcze jedno, ich obserwacja wymaga obniżenia temperatury do około 50 mK oraz przyłożenia pola magnetycznego rzędu 20 T, tj. $4\cdot 10^5$ razy większego od pola ziemskiego.

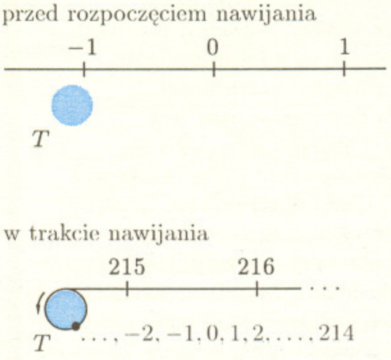


Rys. 1. Wyrazy ciągu (c_n) to części ułamkowe kolejnych wielokrotności x ($x=\sqrt{2}$; $n=1,2,3$).

Co więcej, prawdziwy jest także

Wniosek. *Jeśli liczba naturalna $p > 1$ nie jest liczbą postaci 10^k, $k \in \mathbf{N}$, to na początku zapisu dziesiętnego liczby p^n może pojawić się dowolny skończony ciąg cyfr.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że liczba $\log p$ jest niewymierna, i powtórzyć poprzednie rozważania.



Rys. 2. Weźmy okrąg **T** o obwodzie 1. Linię prostą wyobraźmy sobie jako nitkę (nieskończenie cienką). Nawińmy tę „nitkę" na okrąg **T** jak na szpulkę. Wówczas wszystkie punkty prostej odpowiadające liczbom całkowitym „skleją się" do jednego punktu na okręgu. Punkt ten będziemy oznaczać przez 0.

Dowód Lematu 1. Gdyby dla pewnych $l, m \in \mathbf{N}$ zachodziła równość $\frac{l}{m} = \log 2$, to wprost z definicji logarytmu mielibyśmy $10^{l/m} = 2$, czyli $10^l = 2^m$. To jest sprzeczność, bowiem 10^l dzieli się przez 5, zaś 2^m – nie. ■

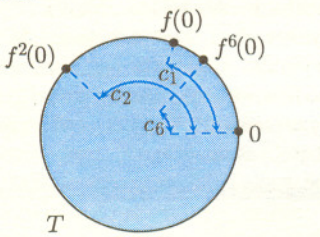
Dowód Lematu 2. Zauważmy najpierw, że wszystkie wyrazy ciągu c_n są różne. Gdyby bowiem $c_k = c_m$ dla $m \neq k$, to mielibyśmy $(k-m)x = [kx] - [mx]$. To jest sprzeczność, bowiem iloczyn różnej od zera liczby całkowitej $k - m$ oraz liczby niewymiernej x nie może być liczbą całkowitą.

Weźmy teraz takie $n \in \mathbf{N}$, że $\frac{1}{n} < b - a$. Ponieważ liczby $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ są różne i należą do odcinka $[0,1]$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że dla pewnych i oraz s takich, że $1 \leq i < i + s \leq n + 1$, mamy

$$0 < \varepsilon := |c_i - c_{i+s}| \leq \frac{1}{n} < b - a\,. \tag{1}$$

Dalej wygodnie jest posłużyć się następującym wyobrażeniem.

Oś liczbową możemy zwinąć w okrąg **T** o długości 1 z wyróżnionym punktem 0 (tak, jak pokazuje rys. 2). Dla $\alpha, \beta \in [0,1]$ przez (α, β) oznaczać będziemy łuk okręgu **T** odpowiadający przedziałowi $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$.

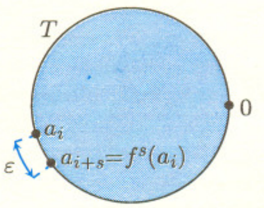


Rys. 3. Długość łuku $(0, f^n(0))$ jest równa c_n (łuk od punktu 0 do $f^n(0)$ trzeba prowadzić przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara).

Niech $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ będzie obrotem o kąt $2\pi x$ radianów w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Zamiast patrzeć na liczby c_n na odcinku $[0,1]$, będziemy obserwować na okręgu **T** obrazy punktu 0 pod działaniem kolejnych iteracji f. Chwila namysłu pozwala stwierdzić, że długość łuku $(0, b_n)$, gdzie

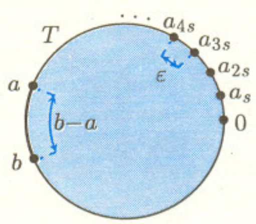
$$b_n := f^n(0) \equiv \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ razy}}(0)\,,$$

jest równa c_n (rys. 3). Zatem, dzięki nierównościom (1) wiemy, że długość łuku między punktami b_i oraz $b_{i+s} = f^s(a_i)$ jest równa $\varepsilon < b - a$. Oznacza to, że f^s jest obrotem o kąt $2\pi\varepsilon$ (rys. 4); kierunek tego obrotu nie ma dla nas znaczenia.



Rys. 4. f^s, czyli s-ta iteracja f, jest obrotem o malutki kąt $2\pi\varepsilon$ (nie wiemy tylko, w którą stronę).

Wynika stąd, oczywiście, że nieskończenie wiele spośród punktów b_s, b_{2s}, b_{3s}, ..., należy do łuku (a,b) zawartego między punktami a i b. Jeśli bowiem wyjdziemy z ustalonego punktu 0 i będziemy chodzić nieskończenie długo po okręgu **T**, stale w tę samą stronę, stawiając kroczki o długości ε, to nieskończenie wiele razy staniemy na łuku (a,b), bo jego długość, $b-a$, jest większa niż długość naszego kroku, ε (rys. 5). ■



Rys. 5. Długość łuku pomiędzy punktami b_{ms} oraz $b_{(m+1)s}$ jest równa $\varepsilon < b - a$. Gdy m rośnie, to punkty b_{ms} obiegają okrąg dookoła; na każdym okrążeniu przynajmniej jeden z nich wpada w „dziurę" na łuku (a,b).

A dlaczego wśród pierwszych wyrazów ciągu utworzonego z pierwszych cyfr kolejnych potęg dwójki nie widać siódemek? Dlaczego ten zdradliwy ciąg wygląda na okresowy? Powód jest prosty: liczba

$$\log 2 = 0{,}3010299956\ldots$$

bardzo dobrze daje się przybliżyć liczbą wymierną 0,3, a dla $x \in \mathbf{Q}$ ciąg $c_n = nx - [nx]$ jest okresowy. Dlatego właśnie po obejrzeniu kilkunastu początkowych wyrazów ciągu (a_n) można nabrać niesłusznego przekonania, że ów ciąg ma okres 10 i siódemka w nim nie występuje, ósemka zaś pojawia się dość często.

W 1910 roku Wacław Sierpiński, Hermann Weyl oraz P. Bohl udowodnili niezależnie, że dla niewymiernego x ciąg $c_n = nx - [nx]$ jest *równomiernie rozłożony* na odcinku $[0,1]$. Dokładniej, jeśli weźmiemy dowolne a i b,

$0 \le a < b \le 1$, i przez $k_n(a,b)$ oznaczymy liczbę elementów zbioru $\{c_i : 1 \le i \le n,\ c_i \in (a,b)\}$, to wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n(a,b)}{n} = b - a\,. \tag{2}$$

Mówiąc obrazowo i niezbyt precyzyjnie, gdy długo chodzimy po okręgu długości 1 stawiając kroczki niewymiernej długości, to na każdą dziurę będziemy następować mniej więcej z częstością proporcjonalną do długości tej dziury.

Przetłumaczmy ten fakt na język potęg dwójki. Niech $a_7(n)$ i $a_8(n)$ oznaczają odpowiednio liczbę siódemek i ósemek wśród pierwszych n wyrazów ciągu a_n. Z równości (2) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_7(n)}{n} = \log 8 - \log 7\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_8(n)}{n} = \log 9 - \log 8\,,$$

zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_7(n)}{a_8(n)} = \frac{\log 8 - \log 7}{\log 9 - \log 8} = 1{,}13370\ldots > 1\,.$$

Oznacza to, że obserwując odpowiednio długie fragmenty ciągu a_n złożonego z pierwszych cyfr kolejnych potęg dwójki zobaczymy nieco więcej siódemek niż ósemek.

Wspomniany wynik Bohla, Sierpińskiego i Weyla oraz nasz fakcik o siódemkach i ósemkach są w istocie prostymi wnioskami z bardzo ogólnego i głębokiego **twierdzenia ergodycznego** G.D. Birkhoffa (pochodzącego z 1931 roku), ale to już zupełnie inna historia.

Kalendarz z potęg dwójki

Wydarzenie	Rok	Potęga dwójki
Chrzest Polski	966	$2^{568} = \mathbf{9,6613}\ldots \times 10^{170}$
Powstanie Uniwersytetu Jagiellońskiego	1364	$2^{3432} = \mathbf{1,3644}\ldots \times 10^{1033}$
Unia Polski z Litwą	1385	$2^{3050} = \mathbf{1,3851}\ldots \times 10^{918}$
Bitwa pod Grunwaldem	1410	$2^{3349} = \mathbf{1,4107}\ldots \times 10^{1008}$
Sobieski pod Wiedniem	1683	$2^{709} = \mathbf{1,6832}\ldots \times 10^{212}$
Wydanie „Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica” Newtona	1687	$2^{6143} = \mathbf{1,6875}\ldots \times 10^{1849}$
Pierwszy rozbiór Polski	1772	$2^{921} = \mathbf{1,7726}\ldots \times 10^{277}$
Drugi rozbiór Polski	1792	$2^{2479} = \mathbf{1,7920}\ldots \times 10^{746}$
Trzeci rozbiór Polski	1795	$2^{1509} = \mathbf{1,7958}\ldots \times 10^{454}$
Kongres Wiedeński	1815	$2^{931} = \mathbf{1,8152}\ldots \times 10^{280}$
Powstanie Uniwersytetu Warszawskiego	1816	$2^{7339} = \mathbf{1,8160}\ldots \times 10^{2209}$
Urodził się Stefan Banach	1892	$2^{8133} = \mathbf{1,8921}\ldots \times 10^{2448}$
Wybuch II wojny światowej	1939	$2^{5522} = \mathbf{1,9392}\ldots \times 10^{1662}$
Koniec II wojny światowej	1945	$2^{1931} = \mathbf{1,9450}\ldots \times 10^{581}$
Narodziny Delty	1974	$2^{1549} = \mathbf{1,9745}\ldots \times 10^{466}$
Dzień dzisiejszy	1994	$2^{3592} = \mathbf{1,9940}\ldots \times 10^{1081}$

Zadanie dla Czytelnika. Dla jakiego n liczba 2^n ma na początku cztery siódemki? A pięć siódemek? Jak oszacować z góry najmniejszą liczbę n, dla której zapis dziesiętny 2^n rozpoczyna się od 1994 kolejnych siódemek?

Rozwiązanie zadania M 708.
Tak. Proste rachunki przekonują nas, że funkcje

$$f(x) = (\sqrt{2})^x \quad \text{oraz} \quad g(x) = \log_{\sqrt{2}} x$$

spełniają wszystkie wymogi zadania.

Rozwiązanie zadania M 709.
Szacując każdą z podstaw potęgi po lewej stronie nierówności przez $\max(x,y)$ dostajemy natychmiast

$$x^{\sin^2\alpha} \cdot y^{\cos^2\alpha} \le$$
$$\le \max(x,y)^{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} =$$
$$= \max(x,y) < x + y\,.$$

Ostatnia nierówność jest ostra, bo obie liczby x i y są dodatnie.

Rozwiązanie zadania M 710.
Niech n oznacza liczbę kul białych w urnie, k zaś – liczbę kul czarnych. Zbiór zdarzeń elementarnych Ω w naszym dwukrotnym losowaniu to produkt kartezjański $U \times U$, gdzie U jest zbiorem wszystkich kul w urnie. Zatem, $|\Omega| = (n+k)^2$. Łatwo stwierdzić, że zdarzeń sprzyjających jest $n^2 + k^2$ (losujemy jedną z n kul białych, i za drugim razem też kulę białą, albo jedną z k czarnych i za drugim razem też czarną). Stąd

$$p = \frac{n^2 + k^2}{(n+k)^2} \ge \frac{1}{2}$$

na mocy oczywistej nierówności $n^2 + k^2 \ge 2nk$.