Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 167 (WT=1,99) i 168 (WT=2,59) z numeru 11/1993

Przemysław Gworys	– Częstochowa	46,72
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,09
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	34,04
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	29,02
Aleksander Surma	– Myszków	15,66
Paweł Perkowski	– Szczecin	13,02

Gratulacje dla Pana Przemysława Gworysa, który po raz drugi zaliczył 44 punkty.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1994

Redaguje Jerzy B. BROJAN

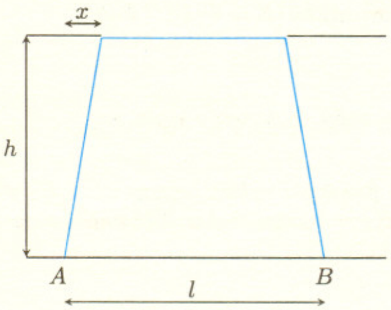
Przypominamy treść zadań:

175. Nad ziemią wieje poziomo wiatr, którego prędkość jest proporcjonalna do wysokości: na każde 100 m wysokości prędkość rośnie o 50 m/s. Prędkość dźwięku względem powietrza wynosi 330 m/s. Po jakim czasie sygnał dźwiękowy dotrze z punktu A do punktu B odległego o 2 km w kierunku wiatru?

176. Oto fragment artykułu z jednego z zeszłorocznych numerów *Świata Nauki*, poświęconego pomiarom temperatury ziemi na różnych głębokościach i możliwościom odtworzenia w ten sposób historii zmian temperatury powietrza:

„Dobowe cykle ciepłych dni i chłodnych nocy wywołują zakłócenia jedynie w najwyższej, metrowej warstwie gleby czy skały, oscylacje zaś sezonowe (wynikające z pór roku) docierają na głębokość około 15 metrów. Cykl stuletni da się obserwować na głębokości około... metrów, a milenijny – około... metrów".

Uzupełnić wartości wykropkowane i uzasadnić. Wskazówka: Zastosować analizę wymiarową.



175. Załóżmy dla uproszczenia, że powyżej pewnego poziomu h wiatr wieje ze stałą prędkością γh (w naszym zadaniu $\gamma = 0{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$), a poniżej tego poziomu wieje ze stałą prędkością $\frac{1}{2}\gamma h$. Wtedy najszybsza droga sygnału składa się z trzech odcinków prostych (rys.). Wprowadźmy czas t przebiegu pierwszego (lub trzeciego) odcinka i kąt α między kierunkiem przemieszczania się sygnału względem powietrza na jednym z tych odcinków a poziomem. Oznaczmy też prędkość dźwięku względem powietrza jako v_0, a odległość AB jako l. Wtedy przesunięcia pionowe h i poziome x możemy kolejno wyliczyć ze wzorów

$$h = tv_0 \sin\alpha, \quad x = t(v_0\cos\alpha + \frac{1}{2}\gamma h),$$

a czas T przejścia całej drogi jest równy

$$T = 2t + \frac{l-2x}{v_0+\gamma h}.$$

Minimum T jako funkcji dwóch parametrów α i t można znaleźć prawdopodobnie tylko numerycznie. Otrzymuje się wartość $T \approx 5{,}032$ s dla $\alpha \approx 0{,}68$ rad, $t \approx 1{,}82$ s (zatem $h \approx 378$ m). Oczywiście, lepsze przybliżenie można by osiągnąć wprowadzając trzy lub jeszcze więcej warstw powietrza – niełatwo jednak znaleźć minimum funkcji, na przykład, czterech zmiennych.

176. Przepływ ciepła jest proporcjonalny do różnicy temperatur, a ściślej – do tzw. gradientu temperatury. Przedstawia to równanie

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \lambda S\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x},$$

gdzie $\mathrm{d}Q$ jest ciepłem przepływającym w czasie $\mathrm{d}t$ w kierunku osi x przez prostopadłą do niej powierzchnię S, $\mathrm{d}T$ jest różnicą temperatur między dwoma punktami odległymi o $\mathrm{d}x$, a λ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego materiału. Nietrudno sprawdzić, że wymiarem tego współczynnika jest $\mathrm{J\ s^{-1}m^{-1}K^{-1}}$. Przepływ ciepła powoduje zmiany temperatury ośrodka, które są odwrotnie proporcjonalne do iloczynu gęstości materiału przez ciepło właściwe. Wymiarem tego iloczynu jest $\mathrm{J\ m^{-3}K^{-1}}$, a kombinując go ze współczynnikiem λ możemy otrzymać wielkość o wymiarze $\mathrm{m^2s^{-1}}$ (tzw. współczynnik przewodzenia temperatury). Głębokość przenikania zmian temperatury musi być proporcjonalna do pierwiastka z iloczynu tego współczynnika przez okres wahań temperatury powierzchniowej. Zatem dla okresu stuletniego głębokość będzie dziesięciokrotnie większa niż dla rocznego, czyli równa 150 m, a dla okresu tysiącletniego – około 500 m.

Uwaga. Podane wartości mają charakter orientacyjny, gdyż głębokość przenikania zależy w pewnym stopniu od precyzji pomiaru temperatury warstw ziemi. Czytelnikom bliżej zainteresowanym przebiegiem zmian temperatury na różnych głębokościach polecamy artykuł w *Świecie Nauki* 8/1993 (zwłaszcza wykresy na str. 18).

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1994

Przypominamy treść zadań:

277. Ciąg (a_n) jest określony przez zależności

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{a_0 + \ldots + a_n} - \sqrt{2} \quad \text{dla} \ \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Czy szereg $\sum a_n$ jest zbieżny?

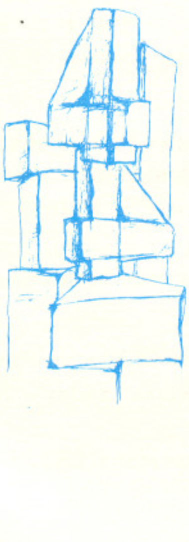
278. Rozwiązać w liczbach całkowitych x, y, z równanie

$$(x+y+z)^3 = 4(x^3+y^3+z^3) + 12xyz + 9.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 267 (WT=1,07) i 268 (WT=1,96) z numeru 10/1993

Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	46,99
Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	46,68
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	44,40
Jan Kraszewski	– Legnica	40,69
Mirosław Matlęga	– Skoczów	40,30
Tomasz Kulpa	– Katowice	38,94
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	36,64

Witamy w **Klubie 44 M** trzech Panów, reprezentujących trzy różne „generacje" uczestników ligi:
L. Gasiński – po raz pierwszy (!);
J. Ciach – po raz czwarty (!!);
J. Janowicz – po raz ósmy (!!!).



277. Ciąg sum częściowych $(s_n = a_0 + \ldots + a_n)$ badanego szeregu spełnia zależność rekurencyjną

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = s_n + \frac{1}{s_n} - \sqrt{2} = f(s_n),$$

gdzie

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2} \qquad \text{dla} \ \ x > 0.$$

Jedynym punktem stałym funkcji f (tj. rozwiązaniem równania $f(x) = x$) w przedziale $(0;\infty)$ jest liczba $\xi = 1/\sqrt{2}$.

Wykażemy, że funkcja $g(x) = f(f(x))$ spełnia nierówności:

(1) $$\xi < g(x) < x \qquad \text{dla} \ \ x \in (\xi; 1\rangle.$$

Funkcja f jest malejąca w przedziale $(0;1\rangle$; zatem dla $x \in (\xi;1\rangle$ mamy $f(x) < f(\xi) = \xi$, a stąd $g(x) = f(f(x)) > f(\xi) = \xi$; uzyskaliśmy pierwszą z nierówności (1).

Dla dowodu drugiej przekształcamy różnicę

$$g(x) - x = \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right) + \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^{-1} - \sqrt{2} - x =$$
$$= \frac{-2\sqrt{2}\,x^3 + 6x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1}{x(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)} = \frac{(1 - \sqrt{2}\,x)^3}{x(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)} < 0$$

(na mocy założenia, że $x > \xi$, czyli $\sqrt{2}\,x > 1$).

Nierówności (1) są więc wykazane. Wynika z nich, że ciąg

$$s_0 = 1, \quad s_2 = g(s_0), \quad s_4 = g(s_2), \quad s_6 = g(s_4), \quad \ldots$$

leży w przedziale $(\xi;1\rangle$ i jest malejący, więc zbieżny. Jego granica musi być punktem stałym funkcji g, należącym do przedziału $\langle\xi;1\rangle$. Jedynie liczba ξ spełnia te warunki (por. (1)). Zatem $\lim s_{2k} = \xi$. Stąd także $\lim s_{2k+1} = \lim f(s_{2k}) = f(\xi) = \xi$, i w konsekwencji $\lim s_n = \xi$.

Wniosek: badany szereg jest zbieżny do sumy $\xi = 1/\sqrt{2}$.

278. Wprowadźmy oznaczenia:

$$s = x+y+z, \qquad p = yz+zx+xy, \qquad q = x^3+y^3+z^3, \qquad r = xyz,$$
$$u = y+z-x, \qquad v = z+x-y, \qquad w = x+y-z.$$

Zadane równanie przepisujemy jako

(2) $$s^3 = 4q + 12r + 9.$$

Zachodzą tożsamości

$$s^3 = x^3+y^3+z^3 + 3yz(y+z) + 3zx(z+x) + 3xy(x+y) + 6xyz =$$
$$= q + 3yz(s-x) + 3zx(s-y) + 3xy(s-z) + 6r =$$
$$= q + 3sp - 3r$$

oraz

$$uvw = (s-2x)(s-2y)(s-2z) =$$
$$= s^3 - 2s^2(x+y+z) + 4s(yz+zx+xy) - 8xyz =$$
$$= -s^3 + 4sp - 8r.$$

Wyznaczając z każdej z nich iloczyn sp oraz przyrównując otrzymane wyrażenia otrzymujemy związek

$$3uvw = s^3 - 4q - 12r.$$

Równanie (2) przybiera zatem postać

$$uvw = 3.$$

Ma ono w liczbach całkowitych następujące rozwiązania (u,v,w):

$$(3,1,1), \qquad (3,-1,-1), \qquad (-3,-1,1)$$

oraz ich permutacje. Otrzymujemy stąd następujące rozwiązania (x,y,z) równania wyjściowego:

$$(1,2,2), \qquad (-1,1,1), \qquad (0,-1,-2)$$

oraz ich permutacje.