(4) W dniach 11–15 listopada 1993 roku w stolicy Łotwy, Rydze, odbyły się Międzynarodowe Zespołowe Zawody Matematyczne *Baltic Way-93*. Pięcioosobowe drużyny z ośmiu państw (Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Litwy, Łotwy, Polski i Szwecji) rozwiązywały te same 20 zadań. Zawody wygrała drużyna Polski (w składzie: Światosław Gal, Jan Gorski, Rafał Łochowski, Konrad Patkowski, Piotr Śniady), nieznacznie wyprzedzając zespoły Łotwy i Estonii.

Jednym z najtrudniejszych zadań okazało się następujące

Zadanie 6. Funkcje $f, g\colon (2,4) \to (2,4)$ dla każdego $x \in (2,4)$ spełniają warunki

(1) $$f(g(x)) = g(f(x)) = x\,,$$

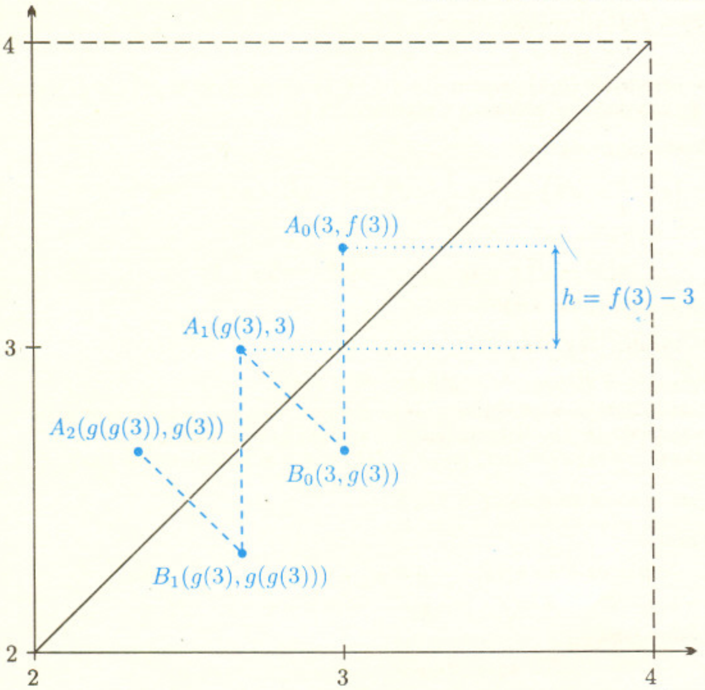
(2) $$f(x) \cdot g(x) = x^2\,.$$

Udowodnić, że $f(3) = g(3)$.

Rozwiązanie. Zastąpmy warunek (2) przez (2′):

(2′) $$f(x) + g(x) = 2x\,.$$

Wtedy szkic rozwiązania można przedstawić na jednym rysunku.



Niech $f(3) = 3 + h$. Wówczas punkt A_0 o współrzędnych $(3, 3+h)$ należy do wykresu funkcji f. Z warunku (2′) wnioskujemy, że punkt B_0 o współrzędnych $(3, 3-h)$ należy do wykresu funkcji g. Odbijając wykres funkcji g od prostej $y = x$ otrzymamy wykres funkcji f, ponieważ warunek (1) mówi, że f i g są wzajemnie odwrotne. Zatem, punkt $A_1 = (3-h, 3)$ należy do wykresu funkcji f, czyli $f(3-h) = (3-h) + h = 3$. Powtarzając powyższe rozumowanie, otrzymamy całą rodzinę punktów $A_1, A_2, \ldots$ należących do wykresu f, przy czym punkt A_n będzie miał współrzędne $(3 - nh, 3 - (n-1)h)$.

Z założenia $f\colon (2,4) \to (2,4)$, czyli wiemy, że cały wykres funkcji f jest zawarty w prostokącie $(2,4) \times (2,4)$. Toteż dla każdej liczby naturalnej n spełnione są nierówności

$$2 < 3 - nh < 4\,, \qquad \text{czyli} \quad -\frac{1}{n} < h < \frac{1}{n}\,.$$

Jednakże wyrażenie $\frac{1}{n}$ zbiega do zera dla $n \to \infty$. Stąd wnosimy, że $h = 0$, a więc $f(3) = 3$. Tak samo dowodzimy, że $g(3) = 3$. Po dokonaniu kosmetycznych zmian w zaprezentowanym rozumowaniu można wykazać, że w istocie dla każdego $x \in (2,4)$ zachodzą równości $f(x) = g(x) = x$. Teraz rozwiązanie zadania w jego oryginalnym sformułowaniu nie powinno już sprawić Czytelnikowi żadnych trudności. ■

Drużyna Szwecji chciała nawet spowodować unieważnienie wszystkich rozwiązań zadania 6. Zmieniłoby to zdobywców trzeciego miejsca. Opiekunowie polskiej ekipy przekonali jednak Jury, że po pierwsze błąd w sformułowaniu zadania został zawiniony wyłącznie przez szwedzkiego członka Jury, po drugie teza trudniejszej wersji zadania jest prawdziwa. Druga z tych czynności wymagała nieco wysiłku...

Podczas sprawdzania rozwiązań przedstawionych przez zawodników okazało się, że drużyna Szwecji, wskutek pomyłki szwedzkiego członka Jury zawodów, otrzymała zniekształconą treść szóstego zadania; mianowicie, w warunku (1) wpisano osłabione założenie $f(g(x)) = g(f(x))$ dla każdego $x \in (2,4)$. Tak sformułowane zadanie jest, oczywiście, trudniejsze, jednak jego teza pozostaje prawdziwa.

Czytelnikowi proponujemy postawienie się w sytuacji zawodników ze Szwecji i rozwiązanie trudniejszej wersji zadania. Można też rozwiązać zadanie **M 708** ze str. 13.

Krzysztof OLESZKIEWICZ