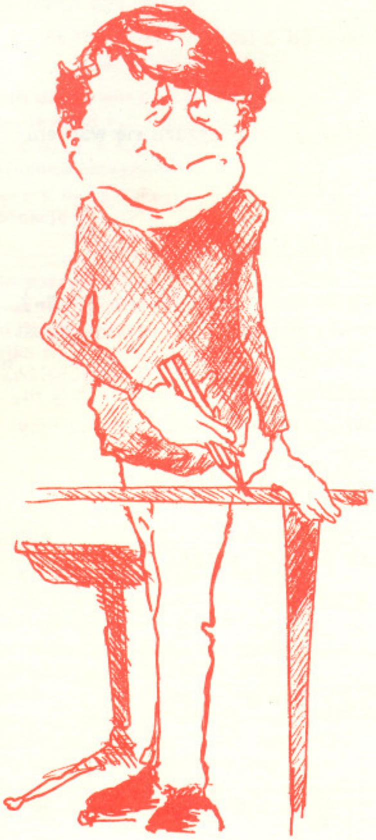
Zasada włączeń i wyłączeń

Przemysław GRZEGORZEWSKI

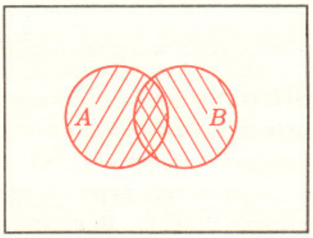


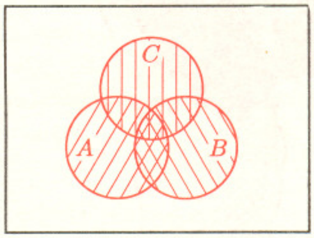
Niech A i B będą dowolnymi skończonymi podzbiorami pewnego zbioru X. Wówczas moc sumy tych zbiorów $A \cup B$ (tzn. liczba elementów należących do $A \cup B$) jest równa:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza moc zbioru. Dla trzech podzbiorów skończonych A, B, C moc sumy wyraża się następująco

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$





Powyższe wzory są prostymi przypadkami następującej zasady, zwanej zasadą włączeń i wyłączeń:

Twierdzenie Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą skończonymi podzbiorami pewnego zbioru X. Wtedy

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_k| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Dowód indukcyjny tego twierdzenia pozostawiam Czytelnikom.

Zasada włączeń i wyłączeń ma wiele zastosowań w różnych dyscyplinach matematycznych. A oto przykłady pochodzące z teorii liczb, rachunku prawdopodobieństwa i analizy kombinatorycznej.

Przykład 1.

W tym przykładzie zasadę włączeń i wyłączeń wykorzystamy w dowodzie twierdzenia dotyczącego tzw. funkcji ϕ Eulera definiowanej następująco

> $\phi(m)$ jest to liczba tych naturalnych $k \leq m$,
> które nie mają z m wspólnego dzielnika różnego od ± 1.

Twierdzenie:

Wartość funkcji ϕ Eulera dla dowolnej liczby naturalnej $m > 1$ wyraża się wzorem

$$\phi(m) = m \cdot \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

gdzie p przebiega zbiór wszystkich dzielników pierwszych liczby m.

Dowód: Weźmy pod uwagę pewną liczbę naturalną $m > 1$. Niech $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ będzie zbiorem wszystkich dzielników pierwszych liczby m. Liczba naturalna k jest względnie pierwsza z m, jeśli nie jest podzielna przez żadną z liczb p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dla $i = 1, \ldots, n$ oznaczmy przez A_i zbiór tych wszystkich liczb naturalnych $k \leq m$, które są podzielne przez p_i. Korzystając z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy

$$\phi(m) = m - \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n| \right).$$

Jak łatwo zauważyć, $|A_i| = \dfrac{m}{p_i}$ (bo jest to zbiór liczb postaci: p_i, $2p_i$, $3p_i \ldots$, $\dfrac{m}{p_i} p_i$); $|A_i \cap A_j| = \dfrac{m}{p_i p_j}$; itd. Wreszcie, $|A_1 \cap \ldots \cap A_n| = \dfrac{m}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}$.
Po podstawieniu otrzymujemy

$$\phi(m) = m - \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{m}{p_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m}{p_i p_j} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{m}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n} \right) =$$

$$= m \left(1 - \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{p_i} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n} \right) = m \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right). \blacksquare$$

Prenumerata „Delty”
za okres:

Prenumerata „Delty”
za okres:

Prenumerata „Delty”
za okres:

Przykład 2 (problem roztargnionej sekretarki).

Pewna sekretarka napisała n różnych listów – po jednym do każdej z n osób. Następnie włożyła je do n kopert, zakleiła koperty, po czym na każdej napisała jeden z n adresów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choć jeden z listów jest dobrze zaadresowany?

Zdarzeniami elementarnymi są tu permutacje na zbiorze n-elementowym, które odpowiadają możliwym przyporządkowaniom adresów poszczególnym kopertom. Jest ich $n!$. Niech A_i oznacza zdarzenie polegające na tym, że i-ty list znajduje się we właściwie zaadresowanej kopercie. Wtedy interesujące nas zdarzenie A – co najmniej jeden list we właściwie zaadresowanej kopercie – jest równe $A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających A obliczymy korzystając z zasady włączeń i wyłączeń. Otóż, skoro A_i sprzyja $(n-1)!$ zdarzeń elementarnych, a zdarzeniu $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ (listy $i_1, i_2, \ldots, i_k$ są we właściwie zaadresowanych kopertach) sprzyja $(n-k)!$ zdarzeń elementarnych i skoro podciąg $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ możemy wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, to

$$|A| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n| =$$

$$= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n} \cdot 1 = n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}.$$

Zatem $P(A) = \dfrac{|A|}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{1}{k!}$. Gdy $n \to \infty$, to $P(A) \to 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx \dfrac{2}{3}$ (dla $n > 7$ jest to już „niemal stałe").

Dodajmy jeszcze, że w rachunku prawdopodobieństwa korzysta się ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, będącego probabilistyczną wersją zasady włączeń i wyłączeń

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n).$$

Przykład 3.

Twierdzenie. Jeżeli $|X| = m$, $|Y| = n$, to liczba wszystkich funkcji ze zbioru X na zbiór Y jest równa $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$.

Dowód. Niech $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ i niech dla $i = 1, 2, \ldots, n$, A_i będzie zbiorem wszystkich funkcji ze zbioru X w zbiór $Y \backslash \{y_i\}$, A zaś – zbiorem wszystkich funkcji z X w Y. Funkcja F jest odwzorowaniem na cały zbiór Y, gdy nie należy do żadnego ze zbiorów A_i. Zatem szukana liczba funkcji jest równa $|A| - |A_1 \cup \ldots \cup A_n|$. Łatwo zauważyć, że $|A| = n^m$, a liczność zbioru wszystkich funkcji ze zbioru X w zbiór $Y \backslash \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\}$ jest równa $(n-k)^m$ (tzn. $|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$). A ponieważ ciąg $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ możemy wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, więc liczba wszystkich funkcji ze zbioru X na zbiór Y jest równa

$$n^m - \left(\binom{n}{1}(n-1)^m - \binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)^m \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m .$$

Zauważmy, że dla $m < n$ nie ma żadnych funkcji ze zbioru X za zbiór Y. Nie powoduje to wcale sprzeczności, bowiem mamy wtedy

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = 0$$

– zastanów się, Czytelniku, dlaczego. ■

Na zakończenie proponuję Czytelnikom łatwe zadanie: proszę podać, ile jest odwzorowań n-elementowego zbioru na siebie mających dokładnie jeden punkt stały ($x \in X$ nazywamy punktem stałym odwzorowania $f : X \to X$, gdy $f(x) = x$).

Rozwiązanie zadania M 705.
Mamy, oczywiście, $a_3 = b_3 = 5$, zatem z definicji obu ciągów

$$b_3 = 5 < a_4 = 7 < b_4 = 8 < \\ < a_5 = 12 < b_5 = 13.$$

Jeśli dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności $b_{n-1} < a_n < b_n$ oraz $b_n < a_{n+1} < b_{n+1}$, to dodając je stronami otrzymujemy natychmiast $b_{n+1} < a_{n+2} < b_{n+2}$. Stąd przez indukcję

$$b_{n-1} < a_n < b_n$$

dla wszystkich $n \ge 4$. Ponadto, oba ciągi są ściśle rosnące począwszy od drugiego wyrazu, istnieją zatem tylko trzy liczby naturalne spełniające warunki zadania: 2, 3 i 5.

Rozwiązanie zadania M 706.
Przypuśćmy, że para liczb naturalnych x, y jest rozwiązaniem. Podnosimy obie strony równania do kwadratu i przenosimy x na prawą stronę. Liczba pierwiastków po lewej stronie zmniejszyła się o jeden, a po prawej stronie nadal mamy liczbę naturalną (pierwiastek kwadratowy jest nieujemny). Powtarzając tę operację wielokrotnie, dochodzimy do wniosku, że

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} = l \in \mathbb{N} \quad \text{oraz} \quad \sqrt{x} = k \in \mathbb{N}.$$

Stąd wynika, że liczby naturalne k i l spełniają zależność $k(k+1) = l^2$. Oczywiście, $k < l$, więc $k + 1 \le l$, skąd $k(k+1) < l^2$ – sprzeczność.

Zatem rozpatrywane równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Rozwiązanie zadania M 707.
Jeśli para liczb naturalnych (x, y) jest rozwiązaniem równania, to $x > y$. Zapiszmy $x = y + r$, $r \ge 1$. Po podstawieniu i prostych rachunkach dostajemy

$$y(y+r)(3r-1) + r^3 = 25.$$

Stąd $1 \le r \le r^3 < 25 < 3^3$, zatem $r = 1$ lub $r = 2$.

W pierwszym przypadku dostajemy równanie $2y(y+1) = 24$, które ma jeden pierwiastek naturalny $y = 3$. Wtedy $x = y + r = 4$; jak się nietrudno przekonać, rzeczywiście jest to rozwiązanie naszego równania.

Gdyby $r = 2$, to mielibyśmy $5y(y+2) = 17$. To jest sprzeczność z założeniem $y \in \mathbb{N}$, bowiem 17 nie dzieli się przez 5.