Kosmiczny kataklizm na Jowiszu

Tomasz KWAST

Przestrzeń kosmiczna jest wedle ziemskich miar niesłychanie pusta. Rozmiary przeciętnej gwiazdy to sekundy świetlne, a odległości dzielące gwiazdy to lata świetlne. Rozmiary planet to dziesiątki tysięcy kilometrów, a dzielące je odległości to setki milionów. Krótko mówiąc, w przestrzeni kosmicznej jest strasznie dużo luzu i trzeba się bardzo postarać, aby trafić np. sondą kosmiczną w sąsiedztwo jakiejkolwiek planety.

Z drugiej strony, wiadomo, że np. na Ziemię spadają od czasu do czasu różnej wielkości bryły skalne wybijające w powierzchni naszej planety dziury nieraz kilometrowej średnicy. Zdarza się to jednak bardzo rzadko. Z pewnością kilka miliardów lat temu planety były intensywnie bombardowane przez resztki materii, z której powstał nasz układ planetarny, a ślady tego można nawet przez niewielką lunetę zobaczyć na Księżycu. Ale obecnie przestrzeń Układu Słonecznego jest już tak oczyszczona, że spadek czegoś w rodzaju meteorytu tunguskiego jest absolutnym fenomenem.

Tak czy inaczej, jesteśmy w przededniu takiego właśnie rzadkiego zjawiska, przy czym nie dość, że jest bardzo rzadkie, to jeszcze wiemy o nim z wyprzedzeniem. Mianowicie w lipcu 1994 roku na Jowisza spadną fragmenty rozdrobnionej komety Shoemakera–Levy'ego. Jak później obliczono, dnia 8 lipca 1992 roku kometa podczas bliskiego przejścia koło Jowisza (43 000 km nad jowiszowymi chmurami) uległa rozerwaniu. Z obliczeń jej ruchu w przeszłości wynika też, że mogła obiegać planetę co najmniej od 1970 roku, teraz jednak zmieniła orbitę na taką, że po wykonaniu jeszcze jednego obiegu po bardzo wydłużonej elipsie ma trafić w samego Jowisza. W marcu 1993 roku, gdy kometę odkryto, wykonane zostały pierwsze zdjęcia łańcuszka jej odłamków, których do dziś (styczeń 1994) naliczono co najmniej 22. Odłamki te spadać będą na planetę od 18 do 24 lipca.

Wydarzenie to zaiste niezwykłe! Ale, niestety, jak pech to pech – zwykły śmiertelnik po prostu go nie zauważy. Jowisz będzie w gwiazdozbiorze Wagi, a więc będziemy go dobrze widzieć w pierwszej połowie nocy, ale odłamki komety spadać będą na jego nocną stronę, niewidoczną także z Ziemi. Co prawda, wskutek rotacji planety miejsca upadku wynurzą się spoza widnokręgu Jowisza po upływie półtorej godziny, jednak dzięki temu można będzie dojrzeć tylko spóźnione skutki spadku skalnych brył do jego atmosfery. Zmierzająca ku Jowiszowi sonda Galileo będzie w lipcu usytuowana nieco korzystniej, jednak i z jej pozycji miejsca spadku widoczne nie będą. Teoretycznie ten kataklizm w całej okazałości mógłby zobaczyć Voyager 2, gdyby nie to, że znajduje się w takiej odległości od Jowisza, jak Pluton od Słońca, dlatego może wprawdzie wykonać pomiary jasności błysków towarzyszących zjawisku, ale nie będzie w stanie uzyskać żadnych obrazów. Błyski te zapewne oświetlą satelity Jowisza i będzie to jedyny bezpośredni sygnał o zjawisku dostępny dla mieszkańców Ziemi. Potem pozostaje już tylko śledzić powierzchnię planety za pomocą największych teleskopów, wliczając w to orbitalny, świeżo usprawniony, Hubble Space Telescope.

Skalę zjawiska nietrudno oszacować, ale wyobrazić – chyba nie. Rozmiary odłamków komety oceniane są na kilka kilometrów. Jeden kilometr sześcienny skał o gęstości trzykrotnie większej od gęstości wody ma masę 3×10^{12} kg. Przy prędkości 60 km/s (a taka będzie prędkość fragmentów komety przy zderzeniu z Jowiszem) niesie energię 5×10^{21} J, co – mówiąc językiem wojskowych – oznacza okrągło milion megaton trotylu (1 Mt TNT jest równoważna energii 5×10^{15} J). Jowisz niewątpliwie to wytrzyma, a my będziemy żałować, że tak wyjątkowego zjawiska, tych błysków możliwych do dostrzeżenia z odległości kosmicznych, nie będzie nam dane widzieć bezpośrednio.

Wpływ Księżyca na akcelerator LEP – czyżby renesans astrologii?

Jan KRÓLIKOWSKI

Akcelerator LEP, program naukowy

W połowie 1989 roku uruchomiono w Europejskiej Organizacji Badań Jądrowych CERN w Genewie nowy akcelerator przeciwbieżnych wiązek e^+e^- – LEP. W tym akceleratorze wiązki elektronów i pozytonów biegną w przeciwnych kierunkach, przecinając się w czterech punktach na obwodzie długiego na 26,66 km pierścienia akceleratora o niemal kolistym kształcie. Akcelerator LEP jest przede wszystkim fabryką bozonów pośredniczących Z^0.

Naukowym powodem wybudowania akceleratora LEP było dokładne poznanie własności bozonów pośredniczących Z^0 – neutralnych cząstek o spinie 1 będących nośnikami oddziaływań słabych przewidzianych przez teorię Weinberga–Salama–Glashowa, zwaną obecnie modelem standardowym. Bozony Z^0 zostały odkryte doświadczalnie w CERNie w 1983 roku w zderzeniach proton-antyproton przez zespoły eksperymentalne UA1 i UA2, którymi kierowali Carlo Rubbia i Pierre Darriulat. W oddziaływaniach proton-antyproton bozony Z^0 powstają rzadko, a wyznaczenie ich własności jest trudne. Tylko część energii układu proton-antyproton może zamienić się w energię Z^0, reszta zaś jest wynoszona przez obficie produkowane inne cząstki wtórne, które utrudniają analizę doświadczalną. Dużo czystszym źródłem Z^0 są procesy anihilacji e^+e^-. W takich anihilacjach cała energia układu e^+e^- może zamienić się w masę (tj. energię spoczynkową) Z^0. W układzie wiązek przeciwbieżnych e^+e^- zachodzi to dla energii wiązek elektronów i pozytonów równej połowie masy Z^0, czyli około 46 GeV (w układzie jednostek, w którym prędkość światła przyjmuje się równą 1, energia, pęd, masa i szerokość całkowita mają ten sam wymiar i można je mierzyć w jednostkach energii, na przykład GeV = 10^9 eV). Akcelerator LEP pracuje właśnie przy energiach rzędu 100 GeV. Liczba produkowanych dziennie cząstek Z^0 dochodzi do kilkudziesięciu tysięcy w każdym z czterech przecięć wiązek e^+e^-.

Podstawowymi parametrami charakteryzującymi cząstkę nietrwałą Z^0 są jej masa M_Z i całkowita szerokość Γ_Z. Zgodnie z zasadą nieokreśloności dla energii cząstki nietrwałe nie mają dokładnie określonej masy. Rozmycie masy jest tym większe, im krócej żyje dana cząstka. Jeśli sporządzimy wykres przedstawiający prawdopodobieństwo produkcji cząstki w zależności od jej masy, to ma ono pewne maksimum. Położenie maksimum definiowane jest jako masa tej cząstki, a szerokość wykresu w połowie wysokości maksimum definiuje szerokość całkowitą Γ. Im więcej jest możliwych stanów cząstek końcowych, na które może rozpaść się dana cząstka, tym krócej ona żyje i, zgodnie z zasadą nieoznaczoności, ma ona większą szerokość Γ. Precyzyjny pomiar Γ pozwala więc uzyskać informacje o możliwych stanach końcowych rozpadu badanej cząstki, nawet jeśli nie potrafimy bezpośrednio zaobserwować niektórych z tych stanów.

Wyznaczenie wspomnianych dwóch wielkości jest dwustopniowe. Po pierwsze należy zmierzyć jakąś wielkość zależną od M_Z i Γ_Z. Po drugie należy porównać wynik pomiaru z przewidywaniami modelu standardowego i wyznaczyć, najlepiej jak można, wartości M_Z i Γ_Z, oraz, co bardzo ważne, oszacować błędy tych wartości.

Podstawowy pomiar to wyznaczenie zależności przekroju czynnego, czyli z grubsza mówiąc liczby produkowanych cząstek Z^0 przypadających na jedno zderzenie e^+e^- na sekundę, od energii zderzających się elektronów. Należy w tym celu umieć nie tylko zliczać powstające w wyniku anihilacji Z^0, ale także umieć porównać liczby cząstek Z^0 produkowanych przy różnych energiach, a więc przy różnych strumieniach anihilujących par e^+e^-. Nie będziemy tu dyskutowali tych trudnych problemów doświadczalnych. Po prostu założymy, że zespoły doświadczalne pracujące w czterech eksperymentach przy LEPie zrobiły to najlepiej, jak było można.

Dlaczego szybka jazda samochodem jest niebezpieczna?

Witold SKIBA

Poruszające się ciała obdarzone są energią kinetyczną. W trakcie hamowania ciało musi stracić tę energię. Przy zderzeniach, tzn. gwałtownych zmianach prędkości, energia ta może spowodować nieodwracalne straty – rozbić karoserię, itp. Im większa prędkość samochodu, tym większa jego energia kinetyczna i stąd poważniejsze mogą być następstwa gwałtownego jej tracenia w trakcie zderzenia. Energia kinetyczna ciała będącego w ruchu, jak prawie każdy pamięta ze szkoły, zależy od kwadratu jego prędkości. Zależność tę opisuje wzór

$$E_k = mv^2/2\,,$$

gdzie m jest masą ciała, a v – jego prędkością. Wzór ten mówi, że E_k rośnie dość szybko (kwadratowo) z prędkością. Żeby rozpędzić dane ciało do prędkości dwa razy większej, potrzeba aż cztery razy więcej energii. Tyle też więcej energii traci ciało na skutek hamowania. Gdyby energia nie rosła tak szybko z prędkością, to i straty w wyniku zderzeń byłyby mniejsze. Spróbujmy zrozumieć zależność E_k od v.

Wydawać by się mogło, że następujące rozumowanie powinno prowadzić do wniosku, że energia kinetyczna zależy liniowo od v. Wyobraźmy sobie, że rozpędzamy najpierw ciało do prędkości v, co wymaga energii E_k, a następnie przechodzimy do układu poruszającego się z tym ciałem i dopiero w tym układzie rozpędzamy ciało do prędkości v w tym samym kierunku (a więc do prędkości $2v$ względem początkowego układu), co znowu wymaga energii E_k – w sumie więc tylko $2E_k$, a nie $4E_k$. W przypadku samochodu można zauważyć, że istnieje wyróżniony układ współrzędnych związany z drogą. Ale jeśli powtórzyć ten argument dla rakiety w kosmosie?

Sprawdźmy, dlaczego taki wariant zależności E_k od v nie może być realizowany w Przyrodzie. Oczywiście, można formalnie wyprowadzić wzór na E_k i już. Spróbujmy jednak zrozumieć to bez formalnych wybiegów wychodząc jedynie z przesłanek zupełnie oczywistych. Po pierwsze, spodziewamy się, że E_k nie zależy od kierunku prędkości – niezależnie, w którą stronę rozpędzamy samochód (na wschód czy na północ), tyle samo trzeba się napracować. Zatem $E_k = E_k(|\mathbf{v}|)$. Proporcjonalność E_k do masy jest oczywista. Będziemy więc masę pomijać rozważając ciała o jednakowej masie. Zobaczmy więc, czy możliwe jest obliczanie E_k, przez dodawanie energii ciała w danym układzie do energii potrzebnej do rozpędzenia go do tego układu, tzn.

$$(*) \qquad E(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|) = E(|\mathbf{u}|) + E(|\mathbf{v}|)\,.$$

Wystarczy wziąć $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ (ciało spoczywające w jednym układzie porusza się z prędkością $\mathbf{v}$ w innym układzie poruszającym się z prędkością $-\mathbf{v}$), aby zauważyć, że $E(0) = 2E(|\mathbf{v}|)$. Z pewnością wzór (*) jest fałszywy. A więc żądanie niezależności E_k od kierunku $\mathbf{v}$ wyklucza już możliwość liniowego wzrostu E_k z $|\mathbf{v}|$, chociaż nie określa szczegółowo charakteru tej zależności.

Drugą zupełnie naturalną cechą energii kinetycznej jest to, że jej zmiana w zderzeniu ciał nie zależy od układu. Zmiana E_k mówi, na przykład, o skutkach zderzenia, wgnieceniach karoserii itp., a te w każdym układzie odniesienia są takie same. Załóżmy zatem, że E_k

można zapisać ogólnie jako

$$E_k = a_1|\mathbf{v}| + a_2|\mathbf{v}|^2 + a_3|\mathbf{v}|^3 + \dots$$

(matematycy nazwaliby to rozwinięciem w szereg potęgowy). Wyznaczymy współczynniki a_i. Przeanalizujmy zderzenie dwóch samochodów o jednakowych masach. Przed zderzeniem w układzie środka masy obydwa samochody poruszają się z prędkościami równymi co do wartości v i przeciwnie skierowanymi; po zderzeniu zaś spoczywają. Rozważmy teraz to samo zderzenie w układzie, w którym jeden z samochodów spoczywa. Oznacza to, że drugi samochód przed zderzeniem ma prędkość $2v$, a po zderzeniu oba samochody poruszają się razem z prędkością v. Obliczymy zmianę energii w trakcie zderzenia w obu układach.

Układ środka masy:

$$-2(a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + \dots)\,.$$

Układ spoczynkowy jednego z samochodów:

$$-(a_1 2v + a_2 4v^2 + a_3 8v^3 + \dots) + 2(a_1v + a_2v^2 + a_3v^3)\,.$$

Żądając, by zmiany te były równe, dostajemy

$$2a_1v - 4a_3v^3 - 12a_4v^4 + \dots = 0\,.$$

Ponieważ v jest dowolne, więc wszystkie współczynniki w tym równaniu muszą być równe zeru. Zatem $E_k = a_2v^2$ i nic więcej.

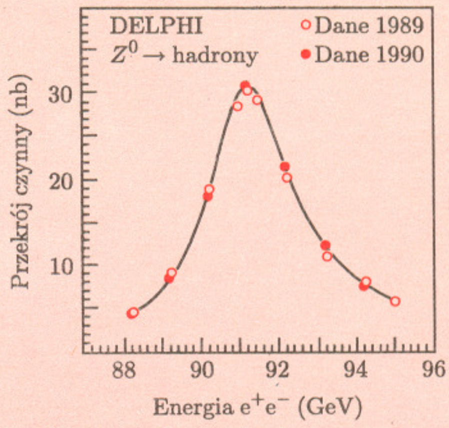
No trudno, E_k nie może być funkcją liniową prędkości. Wzór $E = mv^2/2$ jest słuszny przynajmniej dla małych prędkości. Jadąc szybko samochodem można się pocieszać, że E_k nie rośnie szybciej niż kwadratowo, a w mianowniku stoi dwójka.

Idylla maleńka taka

Wzór de Moivre'a odkrył Euler; twierdzenie Pitagorasa było znane kilkaset lat przed jego urodzeniem; Tales nie znał twierdzenia Talesa; wzory Cardano podali Tartaglia (dla równań stopnia 3) i Ferrari (dla stopnia 4); aksjomat Archimedesa używano co najmniej 150 lat przed jego narodzinami, natomiast sam Archimedes był autorem zasady Cavalieriego (który żył 18 wieków później); jeszcze większy dystans dzieli Dedekinda od wynalazcy przekroju Dedekinda, czyli Eudoksosa (22 wieki); tenże Eudoksos jest wynalazcą pętli Vivianiego; sfery Dandelina wymyślił Apoloniusz; jeszcze śmieszniej jest z płaszczyzną Gaussa wprowadzoną kilkadziesiąt lat przed jego urodzeniem przez Eulera – jej odkrywcą, wedle większości podręczników historii matematyki, jest Wessel; trochę lepiej jest natomiast z prawami de Morgana – odkrył on jedno z nich (drugie 9 lat później Pierce); schemat Hornera jest wynalazkiem arabskim, podobnie jak stosowany do dowolnych wykładników dwumian Newtona; występujący w nim symbol Newtona obliczał Pascal – choć tutaj metodę nazwano uczciwie trójkątem Pascala; przestrzeń kartezjańska i kartezjański układ współrzędnych to dzieło Fermata; sito Eratostenesa występuje w napisanych przed jego urodzeniem *Elementach* Euklidesa; wielościany archimedesowe wymyślił Pappus i sam puścił plotkę, że znał je już jego wielki poprzednik sprzed sześciu wieków – Archimedes. Z bliższych nam okolic: przestrzenie Sobolewa wymyślił Nikodym i nazwał je przestrzeniami Beppa Leviego. W niczym nie zmienia to faktu, że przez cały czas kłócono się zawzięcie o priorytet każdego właściwie odkrycia.

M.K.

Precyzja wyznaczenia liczby cząstek Z^0 i strumienia zderzających się e^+e^- wpływają na błąd wyznaczenia wartości przekroju czynnego. Zależność przekroju czynnego od energii e^+e^- w LEPie przedstawia rysunek 1. Punkty doświadczalne pochodzą z pomiarów eksperymentu z detektorem DELPHI, krzywe zaś są wynikiem dopasowania przewidywań modelu standardowego. Na tym rysunku bardzo wyraźnie widać rezonansowe maksimum odpowiadające produkcji Z^0.



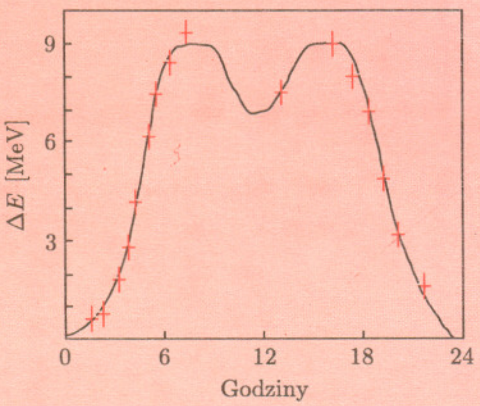
Rys. 1. Wyniki dopasowania kształtu linii Z^0 dla rozpadu Z^0 na hadrony w detektorze DELPHI. Krzywa ciągła to przewidywania modelu standardowego, odpowiadające $M_Z = (91{,}171 \pm 0{,}030 \pm 0{,}030)$ GeV, $\Gamma_Z = (2{,}511 \pm 0{,}065)$ GeV. Drugi błąd podany dla M_Z odpowiada błędowi pomiaru energii e^+e^- w LEPie, który w latach 1981–1990 wynosił 30 MeV.

Błąd wyznaczenia energii początkowych e^+e^-, czyli błąd zmiennej niezależnej, jest głównym tematem tego artykułu.

Od czego zależy energia wiązek w akceleratorze?

LEP jest jednocześnie akceleratorem elektronów (i pozytonów) i pierścieniem akumulacyjnym, to znaczy urządzeniem do długotrwałego utrzymywania wiązek o stałej energii. Przy napełnianiu LEPu wykorzystuje się cały CERNowski kompleks pięciu akceleratorów, które stanowią etapy wstępnego przyspieszania elektronów i pozytonów do energii 20 GeV. Przyspieszenie od 20 do 46 GeV zachodzi już w samym pierścieniu LEPu. Elektrony poruszające się w pierścieniu akceleratora doznają przyspieszeń, a więc promieniują fale elektromagnetyczne tracąc przy tym energię. Tak więc nawet po osiągnięciu energii końcowej musimy ciągle pompować energię z zewnątrz, żeby skompensować straty.

Dokładny pomiar energii elektronów w LEPie jest możliwy dzięki wykorzystaniu wszystkich informacji o całym CERNowskim kompleksie przyspieszającym oraz dzięki wykonaniu skomplikowanych pomiarów pomocniczych. Opis stosowanych metod wykracza poza zakres tego popularnego artykułu. Ważne jest to, że po kilku latach pracy akceleratora osiągnięto precyzję pomiaru energii od 3 do 5 MeV, czyli względną dokładność $\Delta E/E$ około $3{,}5 \times 10^{-5}$. Po dokonaniu tych pomiarów zauważono nieoczekiwany efekt – dobową zależność energii wiązki od czasu przedstawioną na rysunku 2.



Rys. 2. Zależność ΔE od godziny, w której wykonano pomiar energii e^+e^- w LEPie. Na potrzeby tego rysunku przyjęto, że $E_0 = E(0) = E(24\ \mathrm{h})$. Krzywa ciągła jest przewidywaniem teorii pływów.

Okazuje się, że zależność ta jest spowodowana przez ruch Księżyca wokół Ziemi, a dokładniej – przez odkształcenie skorupy ziemskiej spowodowane przyciąganiem grawitacyjnym Księżyca. Zrozumienie tego efektu wymaga dokładniejszego rozważenia mechanizmu przyspieszania elektronów w LEPie.

Do przyspieszania elektronów w LEPie wykorzystujemy fale radiowe o częstości $f = 352\ 254\ 170$ Hz, które w specjalnych wnękach rezonansowych przekazują swoją energię przechodzącym przez wnękę paczkom cząstek. Wybór częstości przyspieszającej nie jest przypadkowy, jest ona liniowo związana z częstością obiegu pierścienia LEPu przez elektrony, a więc z jego rozmiarami, na przykład promieniem R, który dla LEPu wynosi 4,24 km. Tak więc zmiana częstości fal radiowych Δf będzie prowadziła do pewnej zmiany energii wiązek ΔE. Dla LEPu obowiązuje

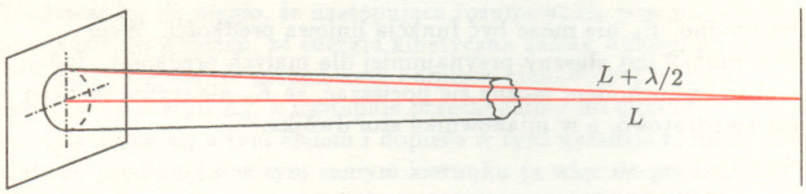
Promień świetlny

Kazimierz PIETRASZKIEWICZ

W optyce pojęcie promienia świetlnego ma dwa znaczenia: jest to nieskończenie cienka linia – pojęcie matematyczne, a także jest to fizyczny **promień**, który ma skończoną grubość.

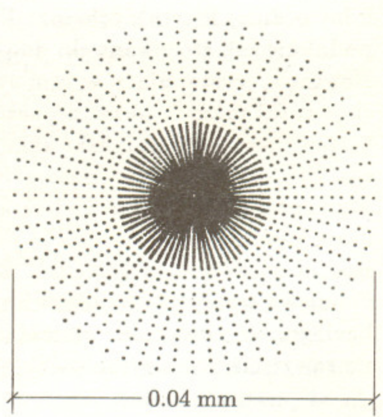
Promień jako pojęcie fizyczne będziemy odróżniali od promienia jako pojęcia matematycznego wytłuszczając ten pierwszy.

Jaka jest jego grubość? Jeżeli spróbujemy wydzielić **promień** przepuszczając falę przez otwór w ekranie, to rozmiary tego otworu nie mogą być większe od rozmiarów pierwszej strefy Fresnela (patrz *Delta* 3/1993). Co to oznacza w praktyce? Otóż, znaczy to tyle, że droga L przebyta przez promień środkowy (od środka otworka do płaszczyzny obserwacji) nie powinna różnić się od drogi przebytej przez promień skrajny o więcej niż $\lambda/2$. Łatwo wykazać, że średnica **promienia** wyniesie $D \leq 2\sqrt{\lambda L}$, gdzie λ jest długością fali świetlnej. Z drugiej strony średnica **promienia** świetlnego nie może być znacznie mniejsza od podanej tu wartości, gdyż wystąpi wtedy silne ugięcie. Tak określony **promień** stanowi rurkę w przestrzeni, zwężającą się w kierunku płaszczyzny obserwacji.



Promień świetlny to podstawowe pojęcie optyki geometrycznej, działu fizyki, który ciągle się rozwija. Optyka geometryczna, mimo że jest teorią przybliżoną, służy także do opisu zjawiska dyfrakcji. Ten dział optyki nazywa się *geometryczną teorią dyfrakcji*. A więc opis zjawisk dyfrakcji nie jest wcale zarezerwowany tylko dla optyki falowej. Optyka geometryczna jest bezkonkurencyjna przy analizie propagacji w ośrodkach niejednorodnych, zwłaszcza wtedy, gdy parametry ośrodka znamy tylko w przybliżeniu. Dobrym przykładem jest tu zjawisko refrakcji astronomicznej, czyli odchylenie **promienia** świetlnego podczas przejścia przez atmosferę ziemską.

Inny przykład to zastosowanie optyki geometrycznej do oceny jakości pojedynczej soczewki. Na soczewkę kierujemy pęk **promieni**, które następnie po opuszczeniu soczewki przecinają płaszczyznę detekcji (płaszczyznę obserwacji) tworząc tzw. diagram śladów. Rozmieszczenie punktów stanowiących diagram śladów jest miarą jakości analizowanej soczewki; im punkty są bardziej skupione, tym lepsza jest soczewka.



Wróćmy jednak do **promienia**. Pewnego razu na ćwiczeniach rachunkowych z teorii dyfrakcji prowadzący zapytał studentów: jaka powinna być średnica otworka w *camera obscura*? (patrz *Delta* 12/1993). Studenci wydawali się zaskoczeni pytaniem i wreszcie jeden z nich powiedział: średnica otworka powinna być taka, aby przeszedł przezeń tylko jeden **promień** (a może miał na myśli promień?). Odpowiedź ta wywołała wesołość na sali. Jednak w świetle tego, co wiemy o **promieniu** jako realnym obiekcie fizycznym, odpowiedź ta jest jak najbardziej poprawna. Rzeczywiście, średnica otworka w *camera obscura* powinna być równa średnicy **promienia**, czyli nie powinna przekraczać rozmiarów pierwszej strefy Fresnela.

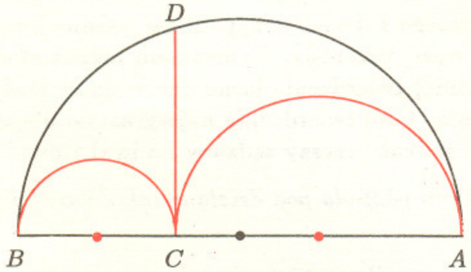
Kącik spokojnych miłośników rachunków

Jeszcze raz o nożu

Pisząc poprzednio o tzw. szewskim nożu wyraziłem opinię, że nie sposób wypowiadać się o jego polu, gdyż brakuje – obecnego w przypadku księżyców Hipokratesa – trójkąta do porównania.

Inną nazwą tej figury jest arbalest – tak nazywano najstraszniejszą broń średniowiecza: kuszę ze stalowym łukiem.

Trójkąta istotnie brakuje, natomiast o polu mówić można, gdyż ładnie się wyraża przez długość wspólnej stycznej dwóch mniejszych półokręgów od punktu styczności do punktu przecięcia z największym półokręgiem.



Oznaczając, tak jak poprzednio (*Delta* 5/1994), odcinek ten przez CD (patrz rysunek), a promienie mniejszych okręgów przez r_1 i r_2, promień zaś dużego okręgu przez r mamy $r = r_1 + r_2$ oraz

$$CD^2 = 2r_1 \cdot 2r_2 ,$$

gdyż trójkąt ADB jest prostokątny, pole natomiast całego noża jest równe

$$\frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2}\pi r_1^2 - \frac{1}{2}\pi r_2^2 = \frac{1}{2}\pi(r^2 - (r_1+r_2)^2 + 2r_1r_2) =$$
$$= \frac{1}{4}\pi(CD)^2 = \pi\left(\frac{CD}{2}\right)^2 .$$

Można to interpretować jako pole koła o średnicy CD.

Warto zwrócić uwagę, że promienie okręgów wpisanych w każdą z części noża można też wyrazić za pomocą CD:

$$s = \frac{CD^2}{4r} .$$

M.K.

następujący związek między względnymi zmianami energii i względnymi zmianami częstości:

$$(1) \qquad \frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{\alpha_c}\frac{\Delta f}{f} ,$$

gdzie stała $\alpha_c = 3{,}84 \times 10^{-4}$ jest związana ze strukturą wnęk rezonansowych LEPu i znamy ją z niezależnych pomiarów z dokładnością około 5%.

Zastanówmy się teraz, co by się stało z energią elektronów, gdyby pierścień akceleratora uległ niewielkiemu odkształceniu, powiedzmy, promień zwiększyłby się o ΔR. Częstość obiegu elektronów ulegałaby zmniejszeniu na skutek niewielkiego wzrostu obwodu pierścienia i przestałaby pasować do starannie dobranej częstości fal radiowych f. Dopasowanie częstości fal do nowych rozmiarów LEPu wymagałoby obniżenia jej o Δf.

Możemy więc zapisać, że w pierwszym przybliżeniu

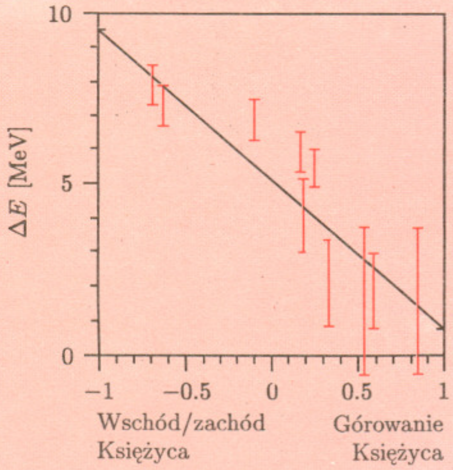
$$(2) \qquad \frac{\Delta f}{f} = -\frac{\Delta R}{R} .$$

Jeżeli częstość radiowa nie ulegnie zmianie, to energia wiązki elektronów musi ulec zmniejszeniu zgodnie ze wzorem (1), co, po podstawieniu zależności (2), prowadzi nas do wzoru

$$(3) \qquad \frac{\Delta E}{E} = -\frac{1}{\alpha_c}\frac{\Delta R}{R} .$$

Obliczenie odkształcenia LEPu pod wpływem sił grawitacyjnych Księżyca wymaga dość złożonych rachunków numerycznych uwzględniających budowę geologiczną i własności sprężyste skał, w których jest wydrążony podziemny tunel akceleratora. Z obliczeń tych wynika, że maksymalna zmiana promienia R wynosi około 150 μm. Względna zmiana promienia LEPu $\Delta R/R$ wynosi więc $(1{,}5\times10^{-4}\text{ m})/(4{,}24\times10^{3}\text{ m}) = 3{,}5\times10^{-8}$. Po podstawieniu do wzoru (3) otrzymujemy względną zmianę energii wiązki równą około $0{,}7 \times 10^{-4}$, czyli zmianę energii układu e^+e^- o około 6,8 MeV. Taką samą zmianę energii e^+e^- można by uzyskać zmieniając częstość fali przyspieszającej o 10 Hz, na przykład z 352 254 170 Hz na 352 254 180 Hz.

Dane z rysunku 2 można teraz wykreślić nie w zależności od czasu, lecz w zależności od stosunku siły pływu w danym momencie doby do maksymalnej siły pływu. Taki wykres przedstawia rysunek 3.



Rys. 3. Zależność ΔE od znormalizowanej siły pływów Księżyca X, zdefiniowanej jako:

$$X = \frac{\text{siła pływów Księżyca w czasie pomiaru}}{\text{maksymalna dobowa siła pływów Księżyca}}.$$

Krzywa ciągła jest przewidywaniem teorii pływów.

Linia ciągła jest wynikiem obliczeń odkształcenia promienia R. Jak widać, zgodność pomiarów energii wiązek w LEPie z przewidywaniami teorii pływów jest bardzo dobra. Nie potrzebujemy więc uciekać się do astrologii.

Włącz komputer!

Okazuje się, że następująca bardzo skomplikowana suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{x}-c)(\sqrt[4]{x}-c)(\sqrt[8]{x}-c)\ldots(\sqrt[2^n]{x}-c),$$

gdzie $x > 0$, zaś $0 < c < 2$, w **bardzo** prosty sposób wyraża się za pomocą x oraz c. Tę całą skomplikowaną sumę można „zwinąć" do jednego bardzo prostego wyrażenia. Co to za wyrażenie? Aż trudno sobie wyobrazić, że taka suma może się uprościć. Dlatego też proponujemy **odgadnięcie** owego wyrażenia za pomocą obliczeń na komputerze. Czekamy na listy z odpowiedziami oraz z ewentualnymi krótkimi opisami, w jaki sposób te odpowiedzi zostały otrzymane.

* * *

Na lekcji matematyki:
– Ile jest komputerów na stole?
– Pięć.
– Teraz schowam dwa komputery pod ławkę. Ile zostanie?
– Trzy.
– Widzicie dzieci, kiedyś uczono liczyć na liczydle, a teraz uczymy się liczyć na komputerach.

P.H.

Matematyka, prawo i życie

Paweł STRZELECKI

Czy prawników warto uczyć matematyki? Wydaje się, że nie: po pierwsze nie będą chcieli się uczyć, po drugie i tak na ogół umieją zarabiać na życie...

Może się to Czytelnikowi wyda nieco przewrotne, ale niekiedy właśnie nieznajomość matematyki pozwala prawnikom na toczenie długich, mętnych, zawiłych spraw. Oto przykład, wyszperany we wspomnieniach słynnego angielskiego matematyka Johna Littlewooda.

Littlewood był tak świetnym matematykiem, że już za jego życia opowiadano o nim rozliczne anegdoty – niektóre z nich można znaleźć w *Delcie* 5/1993.

Począwszy od 1914 roku obowiązywał w Anglii pewien akt parlamentarny dotyczący płacenia podatków za posiadanie domów i kamienic. Akt zawierał sporo definicji; najważniejsze z nich przytaczamy niżej, zachowując (o ile to możliwe) styl oryginału. W nawiasach podajemy własne oznaczenia niektórych wielkości.

Standardowa opłata ($= R$) była zdefiniowana jako równa podatkowi zapłaconemu w 1914 roku ($= R_0$), jeśli ten ostatni nie był mniejszy od pewnej – zależnej od paru nieistotnych dla nas czynników – sumy ($= S$); w przeciwnym razie przyjmowano, że standardowa opłata jest równa owej sumie S. Następnie akt stwierdzał, że

„Dom podpada pod działanie niniejszego aktu, jeśli albo standardowa opłata, albo wspomniana wyżej suma S jest mniejsza niż 105 funtów szterlingów."

W brytyjskich sądach toczyło się podobno wiele spraw, w których chodziło o rozstrzygnięcie, czy należy stosować ów akt. Przy tym owe sprawy (często dość skomplikowane i niejasne) rozpatrywano oddzielnie dla każdego z dwóch przypadków wymienionych w zacytowanym wyżej przepisie. Tymczasem można sformułować (i szybko udowodnić) twierdzenie jasno określające, kiedy się akt stosuje, a kiedy nie. Owo twierdzenie najwyraźniej nie było znane ani prawodawcy, ani całej rzeszy sędziów i adwokatów.

Twierdzenie. *Dom podpada pod działanie aktu wtedy i tylko wtedy, gdy $S < 105$.*

Dowód twierdzenia wynika natychmiast z następującego, trywialnego lematu (Czytelnicy zechcą sami przekonać się o jego prawdziwości).

Lemat. $S = \min(\max(R_0, S), S)$ *dla dowolnych rzeczywistych* R_0 *i* S.

Wystarczy bowiem przypomnieć sobie definicję: standardowa opłata R to po prostu większa z dwóch liczb R_0 i S, czyli $R := \max(R_0, S)$, akt zaś działa wtedy (i tylko wtedy), gdy mniejsza z dwóch liczb R i S jest mniejsza od 105. Ostatecznie, widzimy, że akt działa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$105 > \min(R, S) = \min(\max(R_0, S), S) = S\,.$$

Inny (choć już nie tak ładny) przykład sytuacji, gdy długie i kręte omówienia można łatwo skrócić i uprościć wypisując jeden wzór, znają wszyscy Czytelnicy, którzy muszą płacić podatek dochodowy. Gdy w 1993 roku wypełnialiśmy po raz pierwszy formularze podatkowe, to w wydanej przez Ministerstwo Finansów broszurce tabelka objaśniająca zależność podatku od dochodu zajmowała