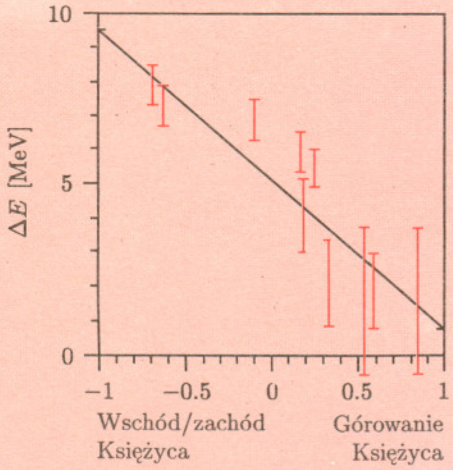


Rys. 3. Zależność ΔE od znormalizowanej siły pływów Księżyca X, zdefiniowanej jako:

$$X = \frac{\text{siła pływów Księżyca w czasie pomiaru}}{\text{maksymalna dobowa siła pływów Księżyca}}.$$

Krzywa ciągła jest przewidywaniem teorii pływów.

Linia ciągła jest wynikiem obliczeń odkształcenia promienia R. Jak widać, zgodność pomiarów energii wiązek w LEPie z przewidywaniami teorii pływów jest bardzo dobra. Nie potrzebujemy więc uciekać się do astrologii.

Włącz komputer!

Okazuje się, że następująca bardzo skomplikowana suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{x}-c)(\sqrt[4]{x}-c)(\sqrt[8]{x}-c)\dots(\sqrt[2^n]{x}-c),$$

gdzie $x > 0$, zaś $0 < c < 2$, w **bardzo** prosty sposób wyraża się za pomocą x oraz c. Tę całą skomplikowaną sumę można „zwinąć" do jednego bardzo prostego wyrażenia. Co to za wyrażenie? Aż trudno sobie wyobrazić, że taka suma może się uprościć. Dlatego też proponujemy **odgadnięcie** owego wyrażenia za pomocą obliczeń na komputerze. Czekamy na listy z odpowiedziami oraz z ewentualnymi krótkimi opisami, w jaki sposób te odpowiedzi zostały otrzymane.

* * *

Na lekcji matematyki:
– Ile jest komputerów na stole?
– Pięć.
– Teraz schowam dwa komputery pod ławkę. Ile zostanie?
– Trzy.
– Widzicie dzieci, kiedyś uczono liczyć na liczydle, a teraz uczymy się liczyć na komputerach.

P.H.

Matematyka, prawo i życie

Paweł STRZELECKI

Czy prawników warto uczyć matematyki? Wydaje się, że nie: po pierwsze nie będą chcieli się uczyć, po drugie i tak na ogół umieją zarabiać na życie...

Może się to Czytelnikowi wyda nieco przewrotne, ale niekiedy właśnie nieznajomość matematyki pozwala prawnikom na toczenie długich, mętnych, zawiłych spraw. Oto przykład, wyszperany we wspomnieniach słynnego angielskiego matematyka Johna Littlewooda.

Littlewood był tak świetnym matematykiem, że już za jego życia opowiadano o nim rozliczne anegdoty – niektóre z nich można znaleźć w *Delcie* 5/1993.

Począwszy od 1914 roku obowiązywał w Anglii pewien akt parlamentarny dotyczący płacenia podatków za posiadanie domów i kamienic. Akt zawierał sporo definicji; najważniejsze z nich przytaczamy niżej, zachowując (o ile to możliwe) styl oryginału. W nawiasach podajemy własne oznaczenia niektórych wielkości.

Standardowa opłata ($= R$) była zdefiniowana jako równa podatkowi zapłaconemu w 1914 roku ($= R_0$), jeśli ten ostatni nie był mniejszy od pewnej – zależnej od paru nieistotnych dla nas czynników – sumy ($= S$); w przeciwnym razie przyjmowano, że standardowa opłata jest równa owej sumie S. Następnie akt stwierdzał, że

„Dom podpada pod działanie niniejszego aktu, jeśli albo standardowa opłata, albo wspomniana wyżej suma S jest mniejsza niż 105 funtów szterlingów."

W brytyjskich sądach toczyło się podobno wiele spraw, w których chodziło o rozstrzygnięcie, czy należy stosować ów akt. Przy tym owe sprawy (często dość skomplikowane i niejasne) rozpatrywano oddzielnie dla każdego z dwóch przypadków wymienionych w zacytowanym wyżej przepisie. Tymczasem można sformułować (i szybko udowodnić) twierdzenie jasno określające, kiedy się akt stosuje, a kiedy nie. Owo twierdzenie najwyraźniej nie było znane ani prawodawcy, ani całej rzeszy sędziów i adwokatów.

Twierdzenie. *Dom podpada pod działanie aktu wtedy i tylko wtedy, gdy $S < 105$.*

Dowód twierdzenia wynika natychmiast z następującego, trywialnego lematu (Czytelnicy zechcą sami przekonać się o jego prawdziwości).

Lemat. $S = \min(\max(R_0, S), S)$ *dla dowolnych rzeczywistych R_0 i S.*

Wystarczy bowiem przypomnieć sobie definicję: standardowa opłata R to po prostu większa z dwóch liczb R_0 i S, czyli $R := \max(R_0, S)$, akt zaś działa wtedy (i tylko wtedy), gdy mniejsza z dwóch liczb R i S jest mniejsza od 105. Ostatecznie, widzimy, że akt działa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$105 > \min(R, S) = \min(\max(R_0, S), S) = S\,.$$

Inny (choć już nie tak ładny) przykład sytuacji, gdy długie i kręte omówienia można łatwo skrócić i uprościć wypisując jeden wzór, znają wszyscy Czytelnicy, którzy muszą płacić podatek dochodowy. Gdy w 1993 roku wypełnialiśmy po raz pierwszy formularze podatkowe, to w wydanej przez Ministerstwo Finansów broszurce tabelka objaśniająca zależność podatku od dochodu zajmowała

– wraz z objaśnieniem i kilkoma przykładami – prawie trzy pełne strony druku. Była tam mowa o kolejnych przedziałach dochodów, progach podatkowych (20% podatku od dochodów mieszczących się w pierwszym przedziale, do tego 30% podatku od dochodu pomiędzy 64,8 mln a 129,6 mln, a dla tych, co ośmielili się zarobić ponad 129,6 mln w ciągu roku, jeszcze 40% od nadwyżki), odejmowaniu jakichś magicznych kwot od dochodów w pierwszym przedziale itp. Matematycy, a może nie tylko oni, zapewne woleliby zamiast tabelki z zawiłymi objaśnieniami, zobaczyć następujące zdanie:

Jeśli dochód roczny (w milionach złotych, po odjęciu kosztów uzyskania i odliczeń) jest równy D, to podatek P (w milionach złotych) wyraża się wzorem

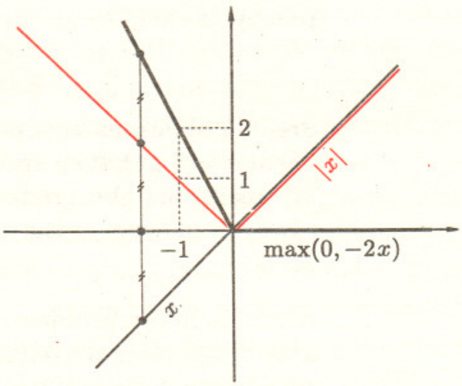
$$P := 0{,}2 \cdot (D - 4{,}32)^+ + 0{,}1 \cdot \left((D - 64{,}8)^+ + (D - 129{,}6)^+\right),$$

przy czym $x^+ := \max(0, x)$ oznacza nie mniejszą z liczb 0 i x.

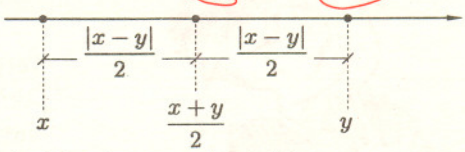
Pomogła nam znowu funkcja $\max(x, y)$, która z dwóch liczb wybiera większą i jest wygodnym narzędziem do zwięzłego zapisywania przepisów w rodzaju „jeśli tak, to zrób tak, a w przeciwnym przypadku postępuj trochę inaczej". Innym takim wygodnym narzędziem, dobrze znanym nawet przeciętnemu uczniowi, jest moduł (wartość bezwzględna); nic dziwnego, bo obie funkcje są powiązane prostymi wzorami. Mianowicie, jak łatwo sprawdzić

$$|x| = x + \max(0, -2x), \quad \max(x, y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$$

dla dowolnych rzeczywistych x i y (patrz rys. 1 i 2).



Rys. 1. Jeśli dodamy dwie funkcje, x oraz $\max(0, -2x)$, to dostaniemy $|x|$ – wystarczy naszkicować wykresy i przypomnieć sobie twierdzenie Talesa.

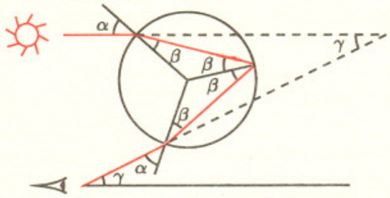


Rys. 2. Dla dwóch liczb $x, y \in \mathbf{R}$ punkt $\frac{x+y}{2}$ jest środkiem łączącego je odcinka. Gdy z owego środka przesuniemy się w prawo o pół długości odcinka, czyli o $\frac{|x-y|}{2}$, to nadepniemy na większą z dwóch liczb x oraz y.

Podobnych sytuacji można, jak sądzę, znaleźć wiele; język matematyki jest po prostu znacznie bardziej zwięzły i precyzyjny niż język prawa. Niejasności związane z interpretacją rozmaitych przepisów są często źródłem zwiększonych dochodów dla prawników, a dla innych – powodem zgryzoty, zdenerwowania czy marnotrawienia czasu. Wydaje się, że nic na to poradzić nie można; taki już jest nasz świat.

Wszystkich, którzy znają inne ciekawe historie tego rodzaju, prosimy o podzielenie się swą wiedzą z redakcją *Delty*.

Rozwiązanie zadania F 383. Tęcza powstaje wskutek wewnętrznego odbicia światła od kropelek deszczu (rys.).



Kąt między promieniem padającym na kroplę, a wpadającym do oka wynosi

$$\gamma = 2\beta - 2(\alpha - \beta) = 4\beta - 2\alpha.$$

Z prawa załamania

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

możemy wyznaczyć $\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)$. Kąt γ jest teraz funkcją tylko kąta α, tj. $\gamma(\alpha)$, $\alpha \in (0°, 90°)$. Obraz tęczy powstaje, gdy padające promienie po odbiciu są nadal równoległe. Warunek ten jest w przybliżeniu spełniony dla takiego α, że $\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$, tj:

$$4\frac{d\beta}{d\alpha} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Z drugiej strony

$$\sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\frac{1}{n}.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{n}{2}, \\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \end{cases}$$

przez podniesienie do kwadratu i eliminację $\sin^2\beta$ otrzymujemy

$$\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} = 59{,}4°,$$

stąd

$$\beta = \arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} = 40{,}2°.$$

Ostatecznie

$$\gamma = 4\arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \approx 42°.$$

Rozwiązanie zadania F 384. Załóżmy, że futerko myszy i otoczenie promieniują jak ciała doskonale czarne. Z prawa Stefana–Boltzmanna mamy moc promieniowania myszy względem tła

$$P = \sigma(T^4 - T_0^4)S.$$

W odległości r gęstość mocy na jednostkę powierzchni musi równać się co najmniej czułości sensorów termicznych grzechotnika

$$a = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Stąd

$$r = \sqrt{\frac{\sigma(T^4 - T_0^4)S}{4\pi a}} = 16 \text{ m}.$$