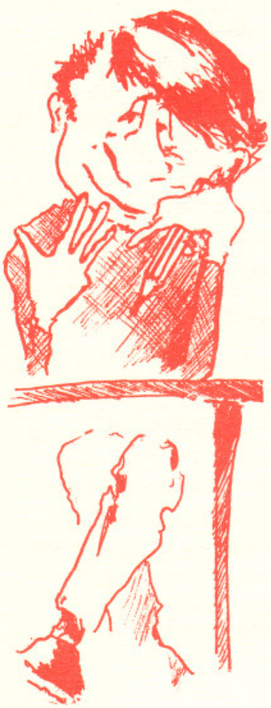


Jaka średnia?

Samochód połowę drogi jedzie z prędkością v_1, drugą połowę drogi z prędkością v_2 różną od v_1. Jaka jest jego średnia prędkość? Prawie każdy, kogo o to zapytam, odpowiada bez namysłu

$$\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

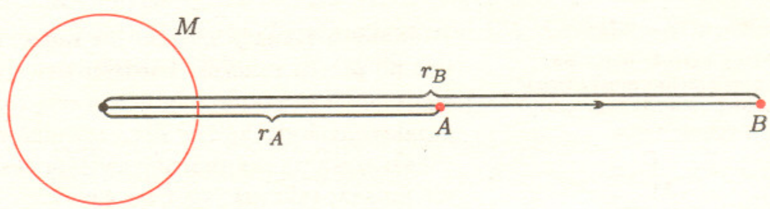
i jest to odpowiedź błędna. Średnia prędkość jest to stosunek drogi do czasu, w którym została ona przebyta. Jeśli przez t_1 i t_2 oznaczymy czasy, w których samochód przebywa jednakowe odległości równe połowie drogi, to z warunku $t = t_1 + t_2$, gdzie t jest czasem potrzebnym na przebycie całej drogi, otrzymujemy

$$\frac{1}{v_{\acute{s}r}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right), \quad \text{czyli} \quad v_{\acute{s}r} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Średnia obliczona zgodnie z powyższą receptą nazywa się średnią harmoniczną. Łatwo spostrzec, że średnia prędkość byłaby średnią arytmetyczną obu prędkości, gdyby samochód w takich samych czasach równych połowie czasu podróży przebył z różnymi prędkościami różne drogi.

A oto podobny problem. Do naczynia nalano ciecz o gęstości ϱ_1 oraz drugą ciecz o gęstości ϱ_2. Jaka jest średnia gęstość obu cieczy znajdujących się w naczyniu? (Przez średnią gęstość rozumiemy stosunek masy do objętości.) W zależności od tego, jak sformułujemy warunki zadania, znów otrzymamy różne średnie. Jeśli jednakowe będą masy obu cieczy – otrzymamy średnią harmoniczną, jeśli jednakowe będą objętości – średnią arytmetyczną.

Teraz całkiem inne zadanie. Rozważmy ciało poruszające się w polu jakiejś siły z punktu A do B. Jaka jest średnia siła działająca na to ciało? Najpierw musimy określić, co mamy na myśli mówiąc „średnia siła". Jest to taka (stała) siła, która wykona tę samą pracę przy takim samym przesunięciu ciała. W zależności od rodzaju siły otrzymamy różne średnie.



Rozważmy ciało o masie m przemieszczające się w centralnym polu grawitacyjnym masy M, jak to jest pokazane na rysunku.

Pracę sił grawitacji obliczymy jako różnicę energii potencjalnych w punktach A i B:

$$W = E_{PA} - E_{PB} = -\frac{GMm}{r_A} + \frac{GMm}{r_B} = -\frac{GMm}{r_A r_B}(r_B - r_A).$$

Widzimy więc, że zgodnie z definicją średniej siły

$$W = -F_{\text{śr}}(r_B - r_A),$$

ma ona wartość

$$F_{\text{śr}} = \frac{GMm}{r_A r_B},$$

czyli $F_{\text{śr}} = \sqrt{F_A F_B}$, gdzie $F_A = \frac{GMm}{r_A^2}$ i $F_B = \frac{GMm}{r_B^2}$ są wartościami sił grawitacji w punktach A i B. Ten rodzaj średniej nosi nazwę średniej geometrycznej. Średnią geometryczną otrzymamy dla sił zmieniających się jak $\frac{1}{r^2}$ (siły grawitacji, siły elektrostatyczne). Gdyby siła zmieniała się liniowo wraz z odległością (tak jest dla sił sprężystości), średnia siła byłaby średnią arytmetyczną siły początkowej i końcowej.

Na zakończenie jeszcze jeden problem. Rozważmy dwa ciała o takich samych pojemnościach cieplnych i początkowych temperaturach bezwzględnych T_1 i T_2 ($T_1 > T_2$). Jeśli pozwolimy na przepływ ciepła pomiędzy tymi ciałami izolując je cieplnie od otoczenia, ich temperatury wyrównają się. Końcowa temperatura tych ciał zależy od sposobu przeprowadzenia procesu. Jeśli całe ciepło oddane przez ciało o wyższej temperaturze zostanie przekazane ciału o niższej temperaturze, końcowa temperatura będzie średnią arytmetyczną początkowych temperatur ciał. Możemy jednak postąpić inaczej. Ciało o wyższej temperaturze może zostać użyte jako grzejnik silnika cieplnego, ciało o niższej – jako jego chłodnica. W tej sytuacji część ciepła oddanego przez pierwsze ciało zostanie zamieniona na pracę. Okazuje się, że maksymalną pracę uzyskamy, jeśli cały proces będzie przebiegał w sposób odwracalny. Temperatura końcowa obu ciał będzie wtedy średnią geometryczną temperatur początkowych.

Mówiliśmy o trzech rodzajach średniej: arytmetycznej, geometrycznej i harmonicznej. W naturalny sposób pojawia się pytanie: która z nich jest największa, a która najmniejsza? Weźmy zatem dwie dodatnie liczby a i b. Zachodzi oczywista nierówność

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0,$$

z której otrzymujemy

$$\frac{1}{2}(a+b) \ge \sqrt{ab}.$$

Tak więc średnia arytmetyczna jest nie mniejsza niż średnia geometryczna. Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$. Dzieląc obie strony ostatniej nierówności przez iloczyn ab otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{ab}},$$

czyli

$$\sqrt{ab} \ge \frac{2ab}{a+b}.$$

A zatem średnia geometryczna jest nie mniejsza niż średnia harmoniczna. Równość znów ma miejsce tylko w przypadku $a = b$.

Małą Deltę przygotował Krzysztof REJMER