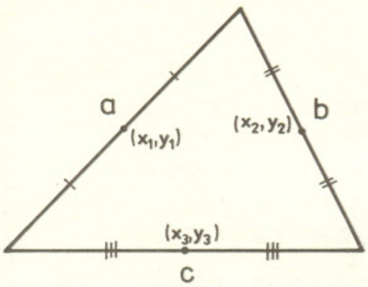
O środkach ciężkości brzegu i powierzchni trójkąta

Robert HAJŁASZ

Powszechnie wiadomo, że środek ciężkości powierzchni trójkąta leży na przecięciu się środkowych boków trójkąta.

Zbadamy, gdzie leży środek ciężkości brzegu trójkąta. Okazuje się, że środki te są na ogół różne (gdy trójkąt jest równoboczny, wtedy środki pokrywają się).



Rys. 1

Niech na płaszczyźnie dane będą punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$, odpowiednio. Wówczas, jak wiadomo, środkiem ciężkości tego układu jest punkt (α, β), gdzie

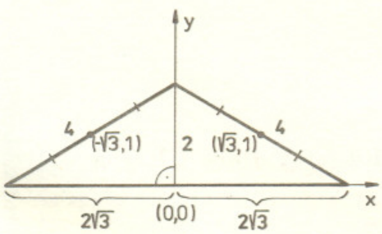
$$\alpha = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$
$$\beta = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Rozważmy trójkąt o bokach długości a, b, c (rys. 1).

Przyjmijmy, że jednostka długości ma masę 1. Zatem boki trójkąta mają masy a, b i c.

Aby wyznaczyć środek ciężkości układu złożonego z boków trójkąta, układ ten zastępujemy układem trzech punktów – środków boków – o masach a, b i c, odpowiednio. Jak wiadomo, oba układy mają wspólny środek ciężkości. Oznaczając przez (x_1, y_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3) środki boków otrzymujemy, że ów środek ciężkości (α, β) wyznaczają równości

$$\alpha = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \quad \beta = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}.$$



Rys. 2

Przykład. Znaleźć środek ciężkości a) brzegu, b) obszaru trójkąta o bokach długości 4, 4, $4\sqrt{3}$.

Rozwiązanie. Umieśćmy trójkąt w układzie współrzędnych tak jak na rysunku 2.

Ad a)

$$\alpha = \frac{4(-\sqrt{3}) + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\cdot 0}{8 + 4\sqrt{3}} = 0,$$
$$\beta = \frac{4\cdot 1 + 4\cdot 1 + 4\sqrt{3}\cdot 0}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{8}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Zatem odpowiedź jest $(0, 4 - 2\sqrt{3})$.

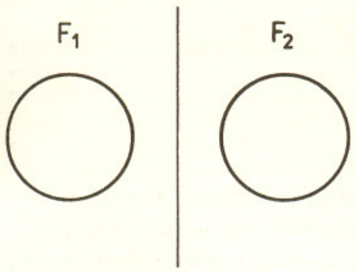
Ad b) Środek ciężkości pełnego trójkąta leży w punkie przecięcia się środkowych jego boków. Ponieważ przecinają się one w stosunku $1:2$, więc mamy od razu, że środkiem ciężkości jest punkt $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$.

Pokażemy teraz, jak można innymi sposobami rozwiązać problemy a) i b).

Pierwsza reguła Guldina

Jeśli linię płaską obrócimy dookoła osi leżącej w płaszczyźnie linii i nie przecinającej linii, to

$$\text{(Pole powierzchni powstałej z obrotu linii)} =$$
$$= \text{(długość linii)} \cdot \text{(droga środka ciężkości linii)}.$$



Rys. 3. Tu figura, składająca się z F_1 i F_2, znajduje się po obu stronach osi. Dla niej reguły Guldina nie obowiązują (proszę je zastosować!).

O zastosowaniu środka ciężkości w geometrii można przeczytać w wydanej przez WSiP w 1993 r. książce Ośrodka Kultury Matematycznej „Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie".

Druga reguła Guldina

Jeśli obszar płaski obrócimy dookoła osi leżącej w płaszczyźnie obszaru i nie przecinającej obszaru, to

(Objętość bryły powstałej z obrotu obszaru) =

= (pole obszaru) · (droga środka ciężkości obszaru) .

Uwaga. W obu regułach figura ma leżeć po jednej stronie osi, przy czym może tej osi dotykać.

Ad a). Brzeg trójkąta obracamy dookoła osi x. Mamy

$$\underbrace{2(\pi\cdot 2\cdot 4)}_{\text{pole powierzchni dwóch stożków}} = \underbrace{(8+4\sqrt{3})}_{\text{obwód trójkąta}} \cdot \underbrace{2\pi\beta}_{\text{droga środka ciężkości brzegu trójkąta}} .$$

Stąd

$$\beta = 4 - 2\sqrt{3}\,.$$

Ad b). Pełny trójkąt obracamy dookoła osi x. Mamy

$$\underbrace{2\cdot\left(\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2\sqrt{3}\right)}_{\text{objętość dwóch stożków}} = \underbrace{2\sqrt{3}\cdot 2}_{\text{pole trójkąta}} \cdot \underbrace{2\pi\beta'}_{\text{droga środka ciężkości pełnego trójkąta}} .$$

Stąd

$$\beta' = \frac{2}{3}\,.$$

Odcinek dla poczty	Odcinek dla posiadacza rachunku	Potwierdzenie dla wpłacającego
Zł	Zł	Zł ....
słownie złotych	słownie złotych	słownie złotych
adres .... wpłacający	Dokładny adres .... wpłacający	Dokładny adres .... wpłacający ....
a -k .... AMOS	na r-k .... AMOS	na r-k .... AMOS
nazwa 01-806 Warszawa ul. Zuga 12	Dokładna nazwa 01-806 Warszawa ul. Zuga 12	Dokładna nazwa 01-806 Warszawa ul. Zuga 12
zwa nku PKO VIII O/W-wa	nazwa banku PKO VIII O/W-wa	nazwa banku PKO VIII O/W-wa
Nr r-ku 1586-77578-136	Nr r-ku 1586-77578-136	Nr r-ku 1586-77578-136
stempel .... podpis przyjmującego	stempel .... podpis przyjmującego	stempel .... podpis przyjmującego
Pobrano opłatę zł	Pobrano opłatę zł	Pobrano opłatę zł ....