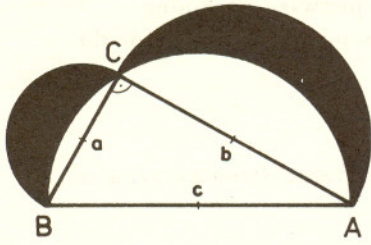
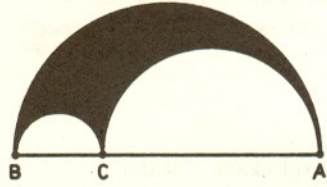


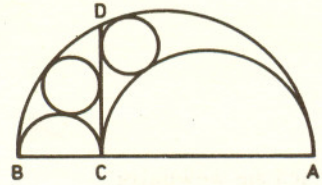
Księżyc i nóż



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Dość powszechnie znaną figurą są *księżycy Hipokratesa*. Chodzi o spostrzeżenie, że gdy narysujemy na bokach trójkąta prostokątnego półokręgi: na przeciwprostokątnej po tej samej jej stronie, co trójkąt, a na przyprostokątnych – po przeciwnych stronach, to ograniczona nimi figura – zwana właśnie księżycami – będzie miała pole równe polu trójkąta.

Rachunek jest rozpaczliwie prymitywny. Od sumy pól dwóch mniejszych półkoli odejmujemy to, co wystaje poza trójkąt z dużego półkola (rys. 1)

$$\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right) - \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{c}{2} \right)^2 - \frac{ab}{2} \right),$$

co po otwarciu nawiasów i zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa daje wynik $\frac{ab}{2}$, czyli pole trójkąta.

Za ciekawszą figurę uchodzi *szewski nóż* – figura podobna do księżyców Hipokratesa, z tą jednak różnicą, że półokręgi rysujemy w sytuacji, gdy punkt C leży na odcinku AB (rys. 2). Trójkąta nie ma, więc nie ma z czym porównywać pola noża. Narysujmy jednak odcinek wspólnej stycznej dwóch mniejszych półokręgów od punktu styczności do przecięcia z dużym półkolem. Nóż został podzielony na dwie (na ogół różnej wielkości) części. I tu jest coś ciekawego – okręgi wpisane w każdą z tych części są tej samej wielkości. Nieprawdopodobne, a jednak (rys. 3). Oczywiście, nie będziemy polegać na obserwacji, choćby w dużej liczbie wykonywanych rysunków. Obliczymy, że tak być musi. Posłużymy się w tym celu układem współrzędnych. Punkty A i B będą w nim miały współrzędne, odpowiednio, $(r, 0)$ i $(-r, 0)$. Oznaczmy też promień pierwszego półkola przez r_1 , a drugiego przez r_2 . I to są dane całkowicie wyznaczające warunki zadania. Oczywiście, $r_1 + r_2 = r$.

Zajmiemy się najpierw tylko prawą częścią noża. Odcinek CD leży na prostej o równaniu $x = r - 2r_1$.

Promień szukanego okręgu oznaczmy przez s , a jego środek przez (x, y) . Umieścimy go na dwóch okręgach i prostej.

Po pierwsze leży on na okręgu współśrodkowym z dużym półkolem, ale o promieniu o s mniejszym, czyli spełnia równanie

$$(1) \quad x^2 + y^2 = (r - s)^2.$$

Ponadto na okręgu współśrodkowym z mniejszym półkolem (jego środek to $(r - r_1, 0)$), ale o promieniu o s większym, czyli spełnia również równanie

$$(2) \quad (x - (r - r_1))^2 + y^2 = (r_1 + s)^2.$$

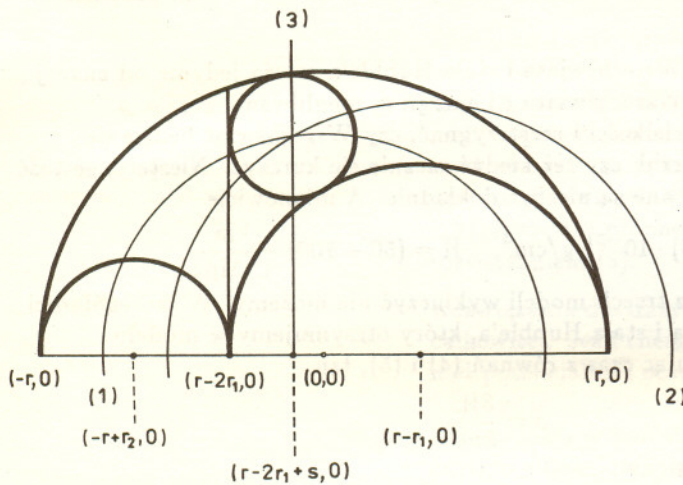
Wreszcie leży na prostej równoległej do odcinka CD , ale odległej od niego o s , czyli dodatkowo spełnia równanie

$$(3) \quad x = r - 2r_1 + s.$$

Wbrew pozorom nie jest chyba najlepiej podstawić od razu znaną wartość x ; lepiej jest zacząć od wyeliminowania y – chodzi nam przecież jedynie o znalezienie wartości s .

Odejmijmy (1) od (2)

$$(x - (r - r_1))^2 - x^2 = (r_1 + s)^2 - (r - s)^2.$$



Rys. 4

Stąd

$$2(r_1 - r)x + (r_1 - r)^2 = r_1^2 + 2sr_1 + 2sr - r^2.$$

Porządkując wyrazy otrzymujemy

$$(r_1 - r)x = r_1r - r^2 + sr_1 + sr = s(r_1 + r) + r(r_1 - r).$$

Teraz wstawiamy (3) i obliczamy s

$$\begin{aligned}(r_1 - r)(r - 2r_1 + s) &= s(r_1 + r) + r(r_1 - r), \\ s(r_1 - r) + (r_1 - r)(r - 2r_1) &= s(r_1 + r) + r(r_1 - r), \\ -2rs &= 2r_1(r_1 - r)\end{aligned}$$

i ostatecznie

$$s = \frac{r_1(r - r_1)}{r} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r}.$$

Symetria wzoru pokazuje, że obliczając promień okręgu wpisanego w drugą część noża otrzymamy ten sam wynik.

Ciekawe jest tu, że $r \cdot s = r_1 \cdot r_2$; perfekcyjniści mogą jeszcze obliczyć (to już naprawdę chwilka jeno, bo x znamy) współrzędne środka jednego i drugiego wpisanego okręgu.

M. K.



Rozwiązanie zadania F 381.

Elektron porusza się po okręgu, a więc indukcja magnetyczna jest skierowana prostopadłe do wektora prędkości elektronu. Siła działająca na elektron wynosi $F = evB$. Ponieważ $F = ma_n$, gdzie $a_n = v^2/r$ jest przyspieszeniem dośrodkowym,

$$\text{więc } r = \frac{mv}{eB} \text{ oraz } a_n = \frac{evB}{m}.$$

Przyspieszenie $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$, gdzie

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt}$$
 jest przyspieszeniem stycznym.

Przy powolnym przechodzeniu na mniejsze orbity kołowe zachodzi $a_t/a_n \ll 1$, $a \approx a_n$. Moc wynosi

$$P = \frac{dE_k}{dt} = mv \frac{dv}{dt} \approx \frac{2}{3} \frac{ke^2}{c^3} a_n^2, \text{ stąd}$$

$$\frac{dv}{dt} = a_t = \frac{2}{3} \frac{ke^2 a_n^2}{c^3 mv}.$$

Podstawiając $a_n = \frac{evB}{m}$ otrzymujemy

$$\frac{a_t}{a_n} = \frac{2}{3} \frac{ke^3 B}{m^2 c^3} \ll 1,$$

gdyż

$$B \ll \frac{3}{2} \frac{m^2 c^3}{ke^3} \approx 3000 \text{ T},$$

co uzasadnia wcześniejsze założenie, że $a_t \ll a_n$. Równanie ruchu ma postać

$$mv \frac{dv}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{ke^2}{c^3} \left(\frac{qvB}{m} \right)^2,$$

(minus w równaniu różniczkowym oznacza zmniejszanie prędkości v)

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = -Av^2, \text{ gdzie } A = \frac{2}{3} \frac{ke^4 B^2}{c^3 m^3}.$$

Podstawiając $x = v^2$ mamy

$$\frac{dx}{x} = -2Adt. \text{ Całkując otrzymujemy}$$

$$v^2 = v_0^2 e^{-2At}. \text{ Ponieważ } r = \frac{mv}{eB}, \text{ więc}$$

$$r = r_0 e^{-At}. \text{ Promień } r \text{ zmniejsza się}$$

dwukrotnie po czasie

$$t = \frac{\ln 2}{A} = \frac{3 \ln 2 c^3 m^3}{ke^4 B^2} = 3,57 \text{ s}.$$

Patrz w niebo

29 września 1989 roku zakończyła się pewna era w astronomii obserwacyjnej. Tego dnia mianowicie 5-metrowym teleskopem w Obserwatorium Palomarskim zostało wykonane ostatnie tradycyjne fotograficzne zdjęcie nieba. Amerykański astronom Sidney van den Bergh po godzinnej ekspozycji w głównym ognisku teleskopu uzyskał obraz słabo świecących włókien gazu otaczającego supernową z roku 1181, w miejscu której obecnie znajduje się też radioźródło 3C58. Co prawda zdjęcie tego samego obszaru nieba zostało powtórzone dobę później, jego jakość jednak okazała się zbyt niska wskutek niespokojnej atmosfery. W każdym razie dyrekcja Obserwatorium zdecydowała, że zdjęć fotograficznych tym teleskopem już więcej robić się nie będzie.

Pierwsze zdjęcie tymże teleskopem wykonał Milton Humason 13 listopada 1949 roku i przez następne 40 lat 5-metrowy teleskop przyczynił się do wielu przełomowych odkryć. Tak na przykład Walter Baade zaobserwował gwiazdy supernowe (a nie nowe!) w Wielkiej Mgławicy w Andromedzie wykazał, że odległości galaktyk są dwukrotnie większe, niż się to dotychczas astronomom zdawało. Następnie Allan Sandage wykorzystując zdjęcia odległych galaktyk wykazał, że najdalsze gwiazdy obserwowane przez Baadego są w istocie obłokami zjonizowanego wodoru, z czego wypływał wniosek, że odległości galaktyk jeszcze raz należy pomnożyć przez dwa. Tym też teleskopem Maarten Schmidt zidentyfikował pierwsze kwazary.

Od ponad czterech lat 5-metrowym teleskopem palomarskim obserwuje się już tylko za pomocą kamer CCD. Te półprzewodnikowe detektory mają przynajmniej dwie cechy zapewniające im bezwarunkowe zwycięstwo nad innymi odbiornikami światła: są dziesiątki razy wydajniejsze i mogą rozróżnić setki razy więcej stopni szarości niż najlepsze emulsje fotograficzne. Nie bez znaczenia jest też możliwość zautomatyzowania i skomputeryzowania obserwacji oraz pozbycie się kłopotliwej chemicznej obróbki zdjęć. Klisze fotograficzne w wielkich obserwatoriach wykorzystuje się obecnie właściwie już tylko do tzw. przeglądów nieba, tu bowiem klisza o rozmiarach na przykład 36×36 cm (a takie stosowane są w palomarskiej kamerze Schmidta) ma zdecydowaną przewagę nad największymi nawet „kostkami” CCD. Jeżeli jednak wkrótce i tu zapanują półprzewodniki, to klisza fotograficzna stanie się w astronomii tym, czym już obecnie są mechaniczne zegary i suwaki logarytmiczne.

Tomasz KWAST