Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VIII 1994

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 263 (WT=2,50) i 264 (WT=2,28) z numeru 8/1993

Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	43,96
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	43,33
Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	39,55
Mirosław Matlęga	– Skoczów	39,44
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	35,57
Jan Kraszewski	– Legnica	35,55

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Zadania z matematyki nr 281, 282

Redaguje Marcin E. KUCZMA

281. Mamy sześć komórek pamięci ponumerowanych od 1 do 6; w każdej komórce znajduje się (w chwili początkowej) liczba 0. Rzucamy kostką; jeśli wypadnie i oczek, zwiększamy o 1 zawartość i-tej komórki. Czynność tę powtarzamy do momentu, gdy we wszystkich komórkach pojawią się liczby jednakowej parzystości.
(a) Wykazać, że z prawdopodobieństwem równym jedności pojawi się konfiguracja kończąca.
(b) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

282. Wewnątrz czworościanu $ABCD$ znajduje się punkt P. Jego odległości od wierzchołków A, B, C, D równe są odpowiednio R_A, R_B, R_C, R_D, a od ścian BCD, ACD, ABD, ABC – odpowiednio r_A, r_B, r_C, r_D. Dowieść, że

$$256\, r_A r_B r_C r_D \le (R_A + r_A)(R_B + r_B)(R_C + r_C)(R_D + r_D).$$

Kiedy zachodzi równość?

Zadanie **282** zaproponował pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1994

Przypominamy treść zadań:

273. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Tworzymy ciągi o wyrazach $y_n = (x_{n-1} + x_{n+1})/2$ oraz $z_n = (x_{n-2} + x_n + x_{n+2})/3$. Udowodnić, że jeżeli $x_n \le y_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, to $y_n \le z_n$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$

274. Liczby naturalne $a \ge 1$ i $b \ge 1$ są względnie pierwsze; $k \ge 1$ jest dowolną liczbą naturalną. Dowieść, że każdy dzielnik nieparzysty liczby $a^{2^k} + b^{2^k}$ ma postać $2^{k+1}t + 1$, gdzie t jest liczbą całkowitą.

273. Ustalmy $n \ge 2$. Wykażemy, że z nierówności $x_k \le y_k$ dla $k = n-1,\ n,\ n+1$ wynika nierówność $y_n \le z_n$. Istotnie:

$$\begin{aligned} x_{n-1} \le y_{n-1} &\implies 4x_{n-1} \le 2x_{n-2} + 2x_n\,; \\ x_{n+1} \le y_{n+1} &\implies 4x_{n+1} \le 2x_n + 2x_{n+2}\,; \\ x_n \le y_n &\implies 2x_n \le x_{n-1} + x_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Dodajemy stronami te trzy nierówności i otrzymujemy

$$3(x_{n-1} + x_{n+1}) \le 2(x_{n-2} + x_n + x_{n+2}),$$

czyli $y_n \le z_n$.

274. Niech $p \ge 3$ będzie dzielnikiem pierwszym liczby $a^{2^k} + b^{2^k}$ i niech $d = \mathrm{NWD}(p-1, 2^k)$. Znajdujemy taką liczbę naturalną c, że $bc \equiv 1 \pmod p$. Obie strony kongruencji $a^{2^k} \equiv -b^{2^k} \pmod p$ mnożymy przez c^{2^k} i otrzymujemy związek $(ac)^{2^k} \equiv -1 \pmod p$. Stąd oraz z „małego" twierdzenia Fermata

$$\left(-1\right)^{(p-1)/d} \equiv \left((ac)^{2^k}\right)^{(p-1)/d} = \left((ac)^{2^k/d}\right)^{p-1} \equiv 1 \pmod p,$$

co oznacza, że $(p-1)/d = m$ jest liczbą parzystą.

Liczba d jako dzielnik 2^k ma postać 2^α, gdzie $\alpha \le k$. Tak więc $p - 1 = 2^\alpha m$ dzieli się przez $2^{\alpha+1}$. Stąd i z określenia d wnosimy, że $d = 2^\alpha = 2^k$, czyli $\alpha = k$, wobec czego $p-1$ dzieli się przez 2^{k+1}.

Wykazaliśmy w ten sposób, że każdy nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $a^{2^k} + b^{2^k}$ ma postać $2^{k+1}u + 1$. Iloczyn liczb tej postaci też jest liczbą tej postaci:

$$(2^{k+1}u + 1)(2^{k+1}v + 1) = 2^{k+1}(2^{k+1}uv + u + v) + 1.$$

Stąd teza.

Zadania z fizyki nr 179, 180

Redaguje Jerzy B. BROJAN

179. Masa helikoptera wynosi $m = 900$ kg, a promień wirnika $r = 4$ m. Obliczyć minimalną moc silnika potrzebną do tego, aby helikopter wznosił się do góry z prędkością $v = 3$ m/s. Gęstość powietrza jest równa $\varrho = 1{,}29$ kg/m^3.

180. W przewodzącej powłoce kulistej o zewnętrznym promieniu R jest dziurka w kształcie koła o promieniu r znacznie mniejszym od R. Jeśli naładować powłokę pewnym ładunkiem elektrycznym, to jaka część tego ładunku będzie rozłożona na wewnętrznej stronie?

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 163 (WT=2,24) i 164 (WT=3,27) z numeru 9/1993

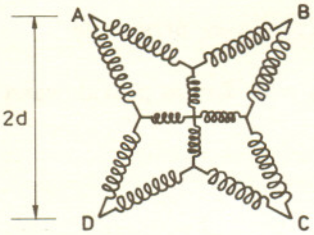
Przemysław Gworys	– Częstochowa	42,14
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	32,78
Andrzej Borowski	– Aleksandr. Kuj.	27,03
Aleksander Surma	– Myszków	13,69
Paweł Perkowski	– Szczecin	11,63

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1994

Przypominamy treść zadań:

171. Dwanaście sprężynek o stałej sprężystości k i długości swobodnej zero (tzn. przyjmujących długość l pod wpływem siły $F = kl$) połączono jak na rysunku 1 i naciągnięto rozpinając je na czterech punktach A, B, C i D tworzących kwadrat o boku $2d$. Jaką siłę wywierają sprężynki na każdy z czterech punktów?

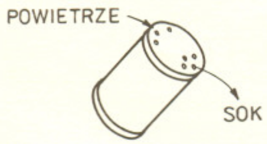
172. Aby przelać sok z puszki do szklanki, trzeba w wieczku wybić dziurki do wylewania soku i dziurki do wlotu powietrza (rys. 2). Jacek wybija dziurki o jednakowej średnicy (np. około 5 mm) i zastanawia się: więcej niż 10 dziurek nie chce mi się wybijać, więc ile z nich powinno służyć do wlotu powietrza, a ile do wylewania soku, żeby wylać go najszybciej?



Rys. 1

171. Oznaczmy długość jednej z czterech środkowych sprężynek przez x; wtedy długość jednej z pozostałych jest równa $y = \sqrt{d^2 + (d-x)^2}$. Warunek równowagi sił w węźle E (lub w którymkolwiek z trzech równoważnych) pozwala wyznaczyć $x = \frac{2}{3}d$, $y = d\sqrt{10}/3$. Z twierdzenia cosinusów znajdujemy $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, zatem szukana siła wywierana na jeden z rogów wynosi $F = 2ky\cos\alpha = 4kd\frac{\sqrt{2}}{3}$.

172. Oznaczmy ciśnienie słupa cieczy nad dolnymi dziurkami przez p, a ciśnienie powietrza w puszce przez p'. Różnica ciśnień wtłaczająca powietrze przez górne dziurki jest równa $p_p = p_{atm} - p'$, a różnica ciśnień wypychająca ciecz przez dolne jest równa $p_c = p + p' - p_{atm}$, zatem $p_p + p_c = p$. Prędkość wypływu gazu lub cieczy przez otwór wyprowadza się z równania Bernoulliego (tzn. z zasady zachowania energii) – wynikiem jest $v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$ (ρ – gęstość).



Rys. 2

Zatem dla cieczy $v_c = \sqrt{2p_c/\rho_c}$, a objętość V, wypływającą na sekundę, otrzymujemy mnożąc v_c przez powierzchnię otworów wylotowych S_c. Objętość wpływającego powietrza jest taka sama i wyraża się analogicznym wzorem. Problem sprowadza się do maksymalizacji wyrażenia V w zależności od S_c i S_p, gdy spełnione są warunki

$$V = S_c\sqrt{\frac{2p_c}{\rho_c}} = S_p\sqrt{\frac{2p_p}{\rho_p}}, \qquad S_c + S_p = \text{const}, \qquad p_c + p_p = p = \text{const}.$$

Z obliczeń wynika, że V jest maksymalne, gdy

$$\frac{S_c}{S_p} = \left(\frac{\rho_c}{\rho_p}\right)^{1/3} \approx 9{,}2\,,$$

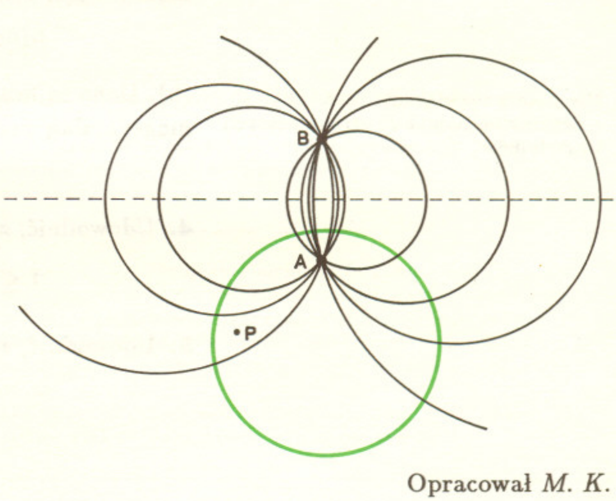
gdzie gęstość soku przyjęliśmy równą gęstości wody, a gęstość powietrza $\rho_p \approx 1{,}29$ kg/m^3. Zatem jedna dziurka powinna służyć do wlotu powietrza, a dziewięć do wypływu soku.

Wykonaj lub zawstydź się!

Nie zawsze umiemy zrobić użytek ze zdobytych w szkole wiadomości, nawet tych uzyskanych w szkole podstawowej. Oto propozycja sprawdzenia, czy intelekt nasz nie rozleniwił się i czy nie biega tylko po tłumnie uczęszczanych szlakach.

Dana jest rodzina wszystkich okręgów przechodzących przez ustalone punkty A i B. Czy potrafisz
1. wykazać, że okrąg przecinający dwa z nich pod kątem prostym (na rysunku kolorowy) przecina pod kątem prostym wszystkie pozostałe?
2. wykazać, że przez każdy punkt nie leżący na symetralnej odcinka AB przechodzi dokładnie jeden taki okrąg?
3. skonstruować taki okrąg przechodzący przez dany punkt P (nie leżący, oczywiście, na tej symetralnej)?

Jeśli nie wiesz, czy potrafisz, to spróbuj!



Opracował *M. K.*