Kącik olimpijski (2)

Nierówności cykliczne

W tym miesiącu „kącik" poświęcamy nierównościom cyklicznym.

Zadanie 1.

Dane są liczby nieujemne a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 o sumie równej 1. Wyznaczyć maksymalną wartość wyrażenia $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_6 + a_6a_1$.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_6 + a_6a_1 \leq$$
$$\leq (a_1 + a_3 + a_5)(a_2 + a_4 + a_6) \leq$$
$$\leq \left(\frac{a_1 + a_3 + a_5 + a_2 + a_4 + a_6}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

gdyż $x_1x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$. Wyrażenie $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_1a_6$ przyjmuje wartość $\frac{1}{4}$ na przykład dla $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \ldots = a_6 = 0$. Zatem poszukiwana maksymalna wartość danego wyrażenia wynosi $\frac{1}{4}$. ■

Zadanie 2.

Udowodnić nierówności

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c.

Rozwiązanie.

Pierwsza nierówność:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1\,.$$

Druga nierówność:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} =$$
$$= 3 - \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right) <$$
$$< 3 - \left(\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c}\right) = 2\,. \blacksquare$$

Propozycje zadań do samodzielnego rozwiązania.

3. (a) Dane są liczby nieujemne $a_1, a_2, \ldots, a_6$ o sumie równej 1. Wyznaczyć maksymalną wartość wyrażenia

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + a_4a_5a_6 + a_5a_6a_1 + a_6a_1a_2\,.$$

Nie znamy rozwiązania części (b) – liczymy na pomoc ze strony naszych Czytelników.

(b). Dane są liczby nieujemne $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o sumie równej 1. Wyznaczyć maksymalną wartość wyrażenia

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots + a_{n-1}a_na_1 + a_na_1a_2\,.$$

4. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c, d zachodzą nierówności

$$1 \leq \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} \leq 2\,.$$

5. Udowodnić, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq 2\,.$$

Krzysztof CHEŁMIŃSKI

Waldemar POMPE