Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań

31 VII 1994

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

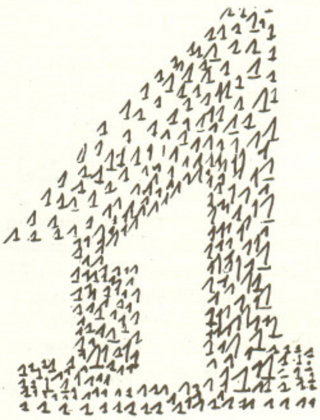
Zadania z matematyki nr 279, 280

Redaguje Marcin E. KUCZMA

279. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian $P(x,y)$ o następujących własnościach:
(1) Jeśli x, y są liczbami całkowitymi nieujemnymi, to wartość $P(x,y)$ też jest liczbą całkowitą nieujemną.
(2) Dla każdej liczby całkowitej $z \geq 0$ równanie $P(x,y) = z$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych $x, y \geq 0$.

280. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty P, Q, R tak, że trójkąt PQR jest równoboczny. Okręgi wpisane w trójkąty ARQ, BPR, CQP mają środki odpowiednio w punktach I, J, K. Załóżmy, że $|IR| = |JR|$. Wykazać, że:
(a) $|IQ| = |KQ|$ oraz $|JP| = |KP|$;
(b) trzy wspólne styczne zewnętrzne dla par rozważanych okręgów wpisanych (nie zawierające boków trójkąta ABC) przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie **280** zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.



Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1993

Przypominamy treść zadań:

271. Do każdej ściany ośmiościanu foremnego o objętości V doklejamy czworościan foremny. Powstała bryła B nie jest wypukła. Obliczyć objętość najmniejszego wielościanu wypukłego zawierającego B.

272. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{ab(A+B)}{ab(A+B)+ABC} + \frac{bc(B+C)}{bc(B+C)+ABC} + \frac{ca(C+A)}{ca(C+A)+ABC} \leq 1,$$

gdzie $A = b + c$, $B = c + a$, $C = a + b$.

271. Ustalmy prostokątny układ współrzędnych, w którym wierzchołkami danego ośmiościanu są punkty $A_1 = (a,0,0)$, $A_2 = (0,a,0)$, $A_3 = (0,0,a)$, $A_4 = (-a,0,0)$, $A_5 = (0,-a,0)$, $A_6 = (0,0,-a)$. Czworościan foremny doklejony do ściany $A_1A_2A_3$ ma czwarty wierzchołek w punkcie $P = (a,a,a)$; zatem $P \in B$. Analogicznie, każdy punkt o współrzędnych równych $\pm a$ należy do bryły B; poszukiwana bryła wypukła wobec tego zawiera sześcian C o wierzchołkach w tych ośmiu punktach. Pozostaje zauważyć, że sześcian C zawiera cały dany ośmiościan wraz z wszystkimi doklejonymi czworościanami; jest więc najmniejszym wielościanem wypukłym zawierającym B.

Część ośmiościanu zawarta w oktancie (sektorze przestrzennym)

$$\{(x,y,z):\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

ma objętość równą 1/6 objętości części sześcianu C zawartej w tym oktancie. Ta sama sytuacja ma miejsce w pozostałych siedmiu oktantach. Zatem objętość C równa się $6V$.

272. Oznaczając

$$u = bc/A, \qquad v = ca/B, \qquad w = ab/C$$

mamy nierówność

$$\begin{aligned} AB - (A+B)(u+v) &= AB - (A+B)\left(\frac{b}{A} + \frac{a}{B}\right)c = \\ &= AB - (A+B)\left(\frac{A-c}{A} + \frac{B-c}{B}\right)c = \\ &= AB - 2(A+B)c + (A+B)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)c^2 = \\ &= \frac{1}{AB}\left[AB - (A+B)c\right]^2 \geq 0, \end{aligned}$$

czyli $AB \geq (A+B)(u+v)$. Zatem pierwszy składnik danego w zadaniu wyrażenia spełnia nierówność

$$\frac{ab(A+B)}{ab(A+B)+ABC} \leq \frac{ab(A+B)}{ab(A+B)+(A+B)(u+v)C} = \frac{w}{u+v+w}.$$

Przez cykliczne przesunięcie oznaczeń wnosimy, że drugi i trzeci składnik rozważanego wyrażenia można oszacować z góry odpowiednio przez liczby

$$\frac{u}{u+v+w}, \quad \frac{v}{u+v+w}.$$

Stąd teza.

Rozwiązanie zadania M 701.
Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i rozpatrzmy n^2 par (x,y) utworzonych przez $1 \leq x \leq n$ oraz $1 \leq y \leq n$. Każda z tych n^2 par jest rozwiązaniem pewnego równania

$$(1) \qquad [x\sqrt[3]{x}] + [y\sqrt[3]{y}] = b,$$

gdzie $1 < b \leq 2[n\sqrt[3]{n}]$. Gdyby dla każdego b równanie (1) miało mniej niż 1994 rozwiązania, to byłoby

$$2n\sqrt[3]{n} \cdot 1994 \geq 2[n\sqrt[3]{n}] \cdot 1994 \geq n^2.$$

Stąd wynika, że $2 \cdot 1994 \geq n^{2/3}$, a to jest sprzeczność dla dużych n. Istnieje więc przynajmniej jedna liczba a spełniająca warunki zadania.

Uważny Czytelnik dostrzeże, że z naszego rozwiązania wynika więcej: liczb a spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele.

Zadania z fizyki nr 177, 178

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 161 (WT=3,65) i 162 (WT=3,65) z numeru 8/1993

Przemysław Gworys	– Częstochowa	39,90
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	28,77
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	25,01

177. Małe ciało porusza się na płaszczyźnie pod działaniem siły wywieranej przez nierozciągliwą nitkę o długości l, przymocowaną do ciała jednym końcem. Drugi koniec nitki jest przesuwany w tej płaszczyźnie z prędkością v stałą co do wartości. Przedyskutować możliwe ruchy tego końca, prowadzące do osiągnięcia przez ciało w ciągu czasu t jak największej prędkości. Przyjąć, że w chwili początkowej ciało spoczywało. Wykluczone jest „szarpanie" nitką, tzn. doprowadzanie do jej zwiotczenia lub do nieograniczonego wzrostu siły napinającej (np. ruch musi rozpocząć się od kierunku prostopadłego do nitki).

Uwaga. Rygorystycznie postawiony problem „Znaleźć taki tor końca nitki, dla którego w ciągu czasu t ciało osiągnie maksymalną prędkość" wydaje się trudny (być może, rozwiązanie ścisłe nie istnieje). Wystarczy więc dyskusja kilku ruchów przykładowych.

178. Gdy na drodze równoległej wiązki światła spójnego umieścimy prostopadłą przeszkodę kołową, to w środku cienia rzucanego na ekran widoczny będzie jasny punkt. Wyjaśnić to zjawisko i oszacować średnicę tego jasnego obszaru, jeśli promień przeszkody wynosi 5 mm, odległość do ekranu – 1 m, a długość fali światła – 0,5 μm.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1993

Przypominamy treść zadań:

169. Dwaj zawodnicy A i B rozegrali regaty na identycznych jachtach, płynąc w dół rzeki, gdy nie było żadnego wiatru. Zawodnik A zwinął żagle, podczas gdy B próbował wykorzystać pozorny wiatr z przeciwka i halsował (płynął „pod wiatr" okresowo zmieniając kurs). Który wygrał wyścig?

170. Z początkowo nieruchomego pistoletu oddano strzał. Obliczyć „kąt podbicia" (kąt między początkowym kierunkiem lufy a torem pocisku) zakładając, że siła odrzutu działająca na pistolet jest znacznie większa od siły działającej ze strony ręki. Dane: masa pocisku m, masa pistoletu M, moment bezwładności pistoletu względem środka masy I, środek masy znajduje się w odległości h od początku lufy o długości l w kierunku prostopadłym do niej.

169. Wygrał zawodnik B (oczywiście, o ile prąd rzeki był dostatecznie szybki, aby wystąpił liczący się efekt). Analiza zagadnienia w układzie związanym z wodą jest nie mniej prawidłowa niż analiza w układzie związanym z powietrzem i brzegami. W tym układzie występuje wiatr przeciwny, który umożliwia halsowanie i wyprzedzenie zawodnika nieruchomego względem wody.

Rozwiązanie zadania M 699.
Niech A, B, C i D będą wierzchołkami danego czworokąta. Jeden z trójkątów ABC, ADC ma pole P_1 nie mniejsze od połowy pola czworokąta – dla ustalenia uwagi niech będzie to $\triangle ABC$. Oznaczmy $L_1 = AB + BC + CA$; z nierówności trójkąta mamy $L_1 < L$. Jeśli wpiszemy okrąg w $\triangle ABC$, to jego promień będzie równy

$$r = \frac{2P_1}{L_1} \geq \frac{P}{L_1} > \frac{P}{L}.$$

170. Zgodnie z podanym założeniem, pistolet należy uważać za ciało swobodne, czyli spełnione są zasady zachowania pędu i momentu pędu. Oznaczmy przez x drogę przebytą przez pocisk względem lufy (w chwili wylotu z lufy $x = l$), a przez β – kąt obrotu pistoletu. Zatem $v_p = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ jest prędkością przesuwu pocisku, a $\omega = \mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t$ – prędkością kątową pistoletu. W nieobracającym się układzie odniesienia związanym ze środkiem masy pistoletu składowa prędkości pocisku wzdłuż osi lufy jest równa $v_p - \omega h$, a wzdłuż osi prostopadłej ωx (rys.). Te wyrażenia możemy wykorzystać także w układzie nieruchomym (związanym ze środkiem masy układu pistolet + pocisk), gdyż są one wtedy składowymi prędkości względnej, tj. sumy prędkości pocisku i środka masy pistoletu. Z zasady zachowania pędu wynika, że składowe prędkości samego pocisku otrzymamy mnożąc składowe prędkości względnej przez $\frac{M}{M+m}$.
Moment pędu całości względem dowolnego punktu jest równy zeru, ale najwygodniej będzie go obliczać względem chwilowego położenia środka masy pistoletu. Wtedy zasada zachowania momentu pędu sprowadza się do równania

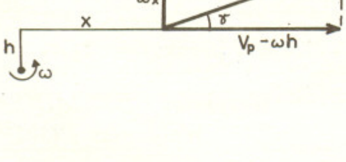
$$I\omega = \left(mh(v_p - \omega h) - m\omega x^2\right)\frac{M}{M+m}. \tag{1}$$

Wprowadzając masę zredukowaną $\mu = \frac{mM}{M+m}$ i przekształcając, otrzymujemy

$$(I + \mu h^2 + \mu x^2)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \mu h \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu h}{I + \mu h^2 + \mu x^2}.$$

Całkowanie daje nam związek między β i x

$$\beta = \frac{h}{\lambda}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$



gdzie przez λ oznaczyliśmy $\lambda = \sqrt{(I/\mu) + h^2}$. Szukany „kąt podbicia" α jest sumą kąta β w momencie wylotu pocisku i zaznaczonego na rysunku kąta γ. Tangens tego kąta jest równy

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega x}{v_p - \omega h},$$

a uwzględniając równanie (1) znajdujemy w chwili wylotu

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\mu h l}{I + \mu l^2}.$$

Ostatecznie

$$\alpha = \frac{h}{\lambda}\operatorname{arctg}\left(\frac{l}{\lambda}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu h l}{I + \mu l^2}\right).$$

Wynik ten jest ścisły i obowiązuje dla dowolnych wartości stałych. Na przykład, dla $I = 0$ otrzymujemy $\alpha = 90°$, gdyż w takiej sytuacji pocisk może się poruszać tylko wzdłuż linii przechodzącej przez punkt początkowy i środek masy pistoletu (linii pionowej). Oczywiście, w praktyce mamy do czynienia raczej z przypadkiem, kiedy $M \gg m$, $I \gg mh^2$, $I \gg ml^2$, a kąty są małe. Wtedy $\alpha \approx \frac{2mhl}{I}$; wyprowadzenie tego wzoru może być znacznie prostsze.