Cyprian Kamil Norwid o konstrukcjach geometrycznych

Marek KORDOS

Niedowiarków powątpiewających w istnienie sensownej wypowiedzi Norwida na ten temat odsyłam do jego wiersza *Plato i Archita.* Wiersz jest dość trudny do zrozumienia dla kogoś mniej obytego z matematyką starożytnej Grecji niż jego autor.

Rzecz dotyczy awantury związanej z rozwiązaniem problemu podwojenia sześcianu. Problem ten to zagadnienie skonstruowania odcinka $\sqrt[3]{2}$ razy dłuższego niż dany – jego sześcian to podwojony sześcian danego odcinka, stąd nazwa. Otóż problem ten można rozwiązać, gdy umie się rozwiązać ogólniejszy problem tzw. dwu średnich proporcjonalnych. Chodzi o to, by do danych odcinków o długości a i b dobrać dwa takie, których długości x i y spełniają zależność

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Dobierając trzy odcinki o takich długościach x, y, z, że

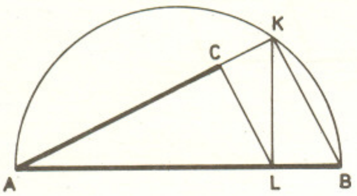
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{b},$$

znajdujemy trzy średnie proporcjonalne itd.
Jedna średnia proporcjonalna nazywana jest średnią geometryczną.

W szczególności dla $b = 2a$ znaleziony odcinek o długości x realizuje podwojenie sześcianu. Istotnie, mamy bowiem $x^2 = ay$ oraz $y^2 = 2ax$, skąd

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax, \text{ czyli } x^3 = 2a^3.$$

A oto sposób rozwiązania tego zadania przez norwidowego Architę – Archytasa z Tarentu (−428; −365), tyrana – co oznacza coś w rodzaju prezydenta, a także stratega – coś w rodzaju generała, ale przede wszystkim znakomitego mechanika.



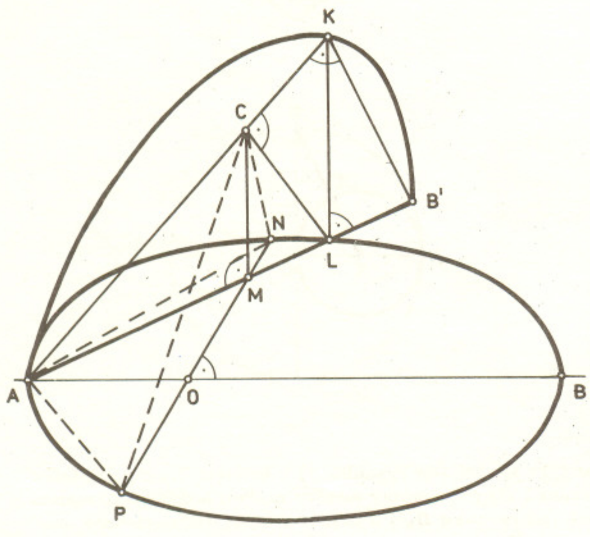
Rys. 1.

Krok pierwszy w stylu *co by było gdyby.* Otóż, gdyby mając dane długości a i b umielibyśmy znaleźć na półkolu o średnicy $AB = b$ taki punkt K, aby skonstruowany przez dwukrotne rzutowanie prostokątne (patrz rys. 1) punkt C miał tę własność, że byłoby $AC = a$, to odcinki AL i AK byłyby dwiema średnimi proporcjonalnymi dla a i b – z oczywistego podobieństwa trójkątów prostokątnych mamy bowiem

$$\frac{AC}{AL} = \frac{AL}{AK} = \frac{AK}{AB}.$$

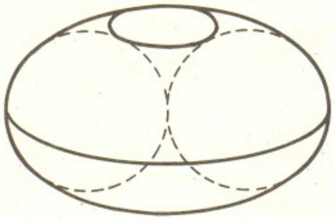
Problem więc jedynie w tym, jak taki punkt K znaleźć.

W celu znalezienia punktu K zastosujemy tzw. analizę Starożytnych – przypuścimy, że stosowny punkt K został znaleziony i badając jego własności postaramy się znaleźć dostatecznie wiele określających go warunków, by można go było wskazać.



Rys. 2.

Rysujemy na płaszczyźnie okrąg o mający średnicę $AB = b$, a następnie w płaszczyźnie do niego prostopadłej, zawierającej średnicę AB, umieszczamy półkole ze znalezionymi punktami K, L i C. Płaszczyznę tę obracamy dokoła przechodzącej przez A prostej prostopadłej do płaszczyzny okręgu o dotąd, aż punkt L znajdzie się na tym okręgu (rys. 2). Uzupełniamy wówczas rysunek rzutem prostokątnym M punktu C na odcinek AB' oraz przechodzącą przez M cięciwą NP okręgu o prostopadłą do AB – jej środek oznaczamy przez O. Ponieważ trójkąt ACL jest prostokątny, więc $CM^2 = AM \cdot ML$. Ponieważ $AM \cdot ML = PM \cdot MN$ (kto nie wie dlaczego, niech spojrzy na margines następnej strony), więc $CM^2 = PM \cdot MN$, z czego wynika, że trójkąt PCN jest prostokątny, a więc P, C i N leżą na okręgu mającym środek w punkcie O i leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do AB. W szczególności wynika stąd, że $AP = AN = AC$, a nawet więcej: punkty te – a wraz z nimi punkt K – leżą na stożku o wierzchołku A.



Rys. 3.

Stożek ten możemy skonstruować znajdując punkty P i N, jako przecięcia okręgu o środku A i promieniu a, leżącego w płaszczyźnie okręgu o, z tym okręgiem. Tym samym dowiedzieliśmy się, że punkt K leży na powierzchni stożka, który możemy skonstruować znając jedynie a i b.

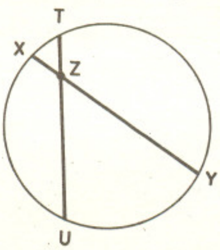
Wskażemy teraz jeszcze dwie powierzchnie, na których leży K. Jedna z nich to walec złożony z prostych prostopadłych do okręgu o i zawierającej go płaszczyzny. Kolejna powierzchnia to „torus bez dziurki" – powierzchnia powstała przez obracanie okręgu dokoła jednej z jego stycznych. Powierzchnia ta jest pokazana na rysunku 3.

Każdą z tych powierzchni możemy skonstruować mając daną jedynie długość b. Punkt (a ściślej każdy z czterech punktów) będący przecięciem tych trzech powierzchni daje nam rozwiązanie problemu dwu średnich proporcjonalnych, a więc w szczególności problemu podwojenia sześcianu.

Dziś każdy, nieco bardziej interesujący się matematyką, wie, że problemu tego nie da się rozwiązać. Sprzeczność znika, gdy dokładniej przyjrzeć się sformułowaniu twierdzenia o niemożności – jest tam mowa o wykonywaniu konstrukcji **na płaszczyźnie**, a na dodatek wyłącznie **cyrklem i linijką**. Sprzeczności więc nie ma. Pozostaje jednak pytanie, dlaczego przyjęte zostały takie ograniczenia. Dyskusja na ten właśnie temat wypełnia wspomniany wiersz Norwida. Drugi z jego tytułowych bohaterów, Platon (−429; −348), jest właśnie autorem przyjętego później powszechnie ograniczenia środków konstrukcyjnych. Powierzchnie, ich konstruowanie, poszukiwanie linii i punktów ich przecięć, wydawało się Platonowi zajęciem z zakresu mechaniki, a więc dyscypliny opartej na pożytkowaniu materii – tym zaś, jego zdaniem, żaden matematyk nie powinien się splamić. Matematyka, wedle Platona, ma być działalnością czysto intelektualną. Nie ma więc w niej miejsca dla nikogo, kto trudni się jakąkolwiek działalnością praktyczną.

Dziś myślenie w stylu Platona (przynajmniej o matematyce) wydaje się nam zdecydowanym anachronizmem. Co jednak o przeciwstawieniu matematyki działalności praktycznej miał do powiedzenia Norwid? Tego tu nie napiszę odsyłając Czytelnika do lektury wiersza Norwida.

Dla przecinających się w punkcie Z cięciw XY i TU tego samego okręgu



zachodzi $XZ \cdot ZY = TZ \cdot ZY$. Wynika to z podobieństwa trójkątów XZT i UZY, ono zaś z twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku. Szerszego kontekstu do tej zależności szukać można pod hasłem *potęga punktu względem okręgu*.

Warto wspomnieć, że ów wiersz był tematem dyskusji przeprowadzonej w dniu 20 kwietnia 1967 roku, przewodniczyli jej matematyk – Edward Marczewski i filolog klasyczny – Jerzy Łanowski. Dyskusja odbyła się w ramach *Czwartków Naukowych* organizowanych przez Wrocławskie Towarzystwo Naukowe od 1961 roku. Działalność *Czwartków* wygasła w latach 70. Ostatnio jednak wobec dużego zapotrzebowania na tego typu działalność intelektualną dnia 17 lutego 1993 roku Senat Uniwersytetu Wrocławskiego powołał do życia *Studium Generale*, którego jedną z form działalności jest prowadzenie dwóch interdyscyplinarnych seminariów poświęconych symetriom i systemom w przyrodzie, sztuce i naukach humanistycznych.

Cyprian Kamil NORWID

PLATO I ARCHITA

ARCHITA

Geometrycznej nieświadom nauki
Widziałem prosty lud, kładący bruki,
I, jako kamień jedna się z kamieniem,
Baczyłem, stojąc pod filarów cieniem –
Aż żal mi było bezwiedności gminu,
Mimo że wieczną on jest wagą czynu!...
Więc – Geometrii myślane promienie
(Rzeknę) gdy z głazem złączę i ożenię,
Sferyczność w drzewie wykłuwszy toporem,
Siłami ramion pchnę brązowe walce,
Promienne jeśli kołom natknę palce...
To – któż wie...

PLATO

Boskie zmysłowiąc obrysy,
Archito! – koturn rzucisz za kulisy –
Języka lotność niebieskiego zgrubisz*,
Więc Filozofię, Grecję może, zgubisz...

* Idealność Platona była przeciwną rodzącej się właśnie mechanice, uważając ją (w pierwotnym jej ekstremie) jako zdegradowanie kontemplacji (przypis Poety).

ARCHITA

O! Plato... padam przed prawdy bez-końcem,
I nieraz, myśli z drzewa ciosząc, płaczę,
Tak wielce wszystko przesiąkłe jest słońcem,
Któremu nie ty, ni ja biegów znaczę;
Dlatego świętych nie zniżę arkanów,
Ani ojczyzny krągłą tarcz wyszczerbię,
Owszem: z tych, które rażą cię dziś, planów,
Z kres tych na Grecji idealnym herbie,
Z liczebnych równań w sił zmienionych dźwignie
(Lubo promienność uroku w nich stygnie),
Któż wie? – powtarzam – czy lud w sobie drobny,
Bezsilny ciałem – jak wyspa osobny,
Sykulów mówię, na przykład, siedziba,**
Tą siły ramion zmnożywszy nauką,
Nie zdoła bronić się jak morska ryba?...

PLATO

Przyjdzie – i tobie dzień zwycięstwa – sztuko!...

** To się odnosi do przyszłości już wyraźniejszej mechaniki, której Archimed na rzecz ojczyzny zażył (przypis Poety).