Symbol Newtona – inaczej

Ilona KRÓLAK

Jest to skrót pracy nagrodzonej srebrnym medalem na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1993 roku.

Omówimy jeden z kilku problemów, którymi zajmowałam się w pracy nadesłanej na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.

Przypomnijmy definicję symbolu Newtona

$$(1) \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie n i k są liczbami naturalnymi, przy czym $n \geq k$. Ma on następującą własność

$$(2) \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Zajmiemy się teraz następującym zagadnieniem.

Problem. Jak rozszerzyć definicję symbolu Newtona $\binom{n}{k}$ na dowolne liczby rzeczywiste n, k, aby był on funkcją ciągłą obu zmiennych n i k oraz aby była spełniona tożsamość (2).

Nietrudno jest rozszerzyć pojęcie symbolu Newtona na przypadek, gdy n jest dowolną liczbą rzeczywistą, k zaś dowolną liczbą całkowitą. Mianowicie łatwo udowodnić, że jeżeli przyjmiemy dla dowolnego $n \in \mathbf{R}$

$$(3) \qquad \binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} & \text{dla } k \in N, \\ 1 & \text{dla } k = 0, \\ 0 & \text{dla } k \text{ całkowitego ujemnego,} \end{cases}$$

to tak zdefiniowana funkcja $\binom{n}{k}$ ma własność (2).

Dowód pomijamy. Pozostaje teraz zdefiniować $\binom{n}{k}$ w przypadku, gdy k nie jest liczbą całkowitą. Przy definicji $\binom{n}{k}$ wykorzystamy zdefiniowane już wartości $\binom{n}{[k]}$ oraz $\binom{n}{[k]+1}$; przypominamy, że $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych rzeczywistych n i k przyjmijmy*

$$\binom{n}{k} = g_1(k-[k])\binom{n}{[k]} + g_2(k-[k])\binom{n}{[k]+1},$$

gdzie g_1 i g_2 są funkcjami ciągłymi określonymi na $[0,1]$, takimi, że $g_1(0) = g_2(1) = 1$, $g_1(1) = g_2(0) = 0$, natomiast $\binom{n}{[k]}$ i $\binom{n}{[k]+1}$ są określone wzorem (3). Wówczas funkcja $\binom{n}{k}$ jest funkcją ciągłą obu zmiennych n i k oraz spełniony jest warunek (2).

Dowód pomijamy.

Drugim problemem, którym zajmowałam się w pracy, było poszukiwanie takiej definicji silni $x!$ dla x rzeczywistego, aby funkcja $\binom{n}{k}$ określona wzorem (1) spełniała (2). Zauważmy, że wówczas automatycznie spełniona jest inna znana tożsamość, a mianowicie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Okazuje się, że niezależnie od tego jak zdefiniuję $x!$, nie dla wszystkich rzeczywistych n i k wzór (1) daje sensowną wartość $\binom{n}{k}$.

Na zakończenie przytoczymy pewien wzór udowodniony w pracy. Otóż, jak dobrze wiadomo, dla dowolnego naturalnego n prawdziwe są następujące wzory

$$\sum_{i=1}^{n} i^0 \binom{n}{i} = 2^n \qquad \sum_{i=1}^{n} i^1 \binom{n}{i} = n2^{n-1}.$$

Okazuje się, że prawdziwe jest też następujące uogólnienie tego wzoru dla dowolnych liczb naturalnych n i s:

$$\sum_{i=1}^{n} i^s \binom{n}{i} = w_s(n)2^{n-s},$$

gdzie $w_s(n)$ jest pewnym wielomianem stopnia s zmiennej n. Wzór ten przytaczamy również bez dowodu.

Rozwiązanie zadania M 698.
Mianownik rozpatrywanego ułamka możemy zapisać w postaci

$6^n n! = 2^n 3^n n! = 2^n \cdot (3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot 3n)$.

W iloczynie

$$(3n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot 3n$$

w każdej spośród n „luk" wyznaczonych przez liczby $3, 6, 9, \ldots, 3n$ występują dwie liczby, jedna z nich jest liczbą parzystą. Zatem

$$(3n)! = 2^n\cdot(3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot 3n)\cdot k$$

dla pewnego $k \in \mathbf{N}$, co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 696.
Skorzystamy z równości $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Jeżeli jednocześnie $n = 5\cdot 6\cdot k$ oraz $n+1 = 7l$, to mamy $(2^{6k})^5 + (2^{5k})^6 = (2^l)^7$, skąd trójka liczb $a = 2^{6k}$, $b = 2^{5k}$, $c = 2^l$ jest rozwiązaniem równania. Zauważmy teraz, że np. liczba $n = 90$ ma żądane własności, wobec czego liczby $a = 2^{18}$, $b = 2^{15}$, $c = 2^{13}$ spełniają nasze równanie

$$(2^{18})^5 + (2^{15})^6 = (2^{13})^7.$$

Rozwiązanie zadania F 378.
Zakładamy, że ruch tłoka jest w przybliżeniu harmoniczny. Stąd przyspieszenie jest równe $a = \omega^2 x = 4\pi f^2 x$. Przy założeniu maksymalnego wychylenia amplituda wynosi $x = d/2$. Dlatego $a = 2\pi^2 f^2 d = 3500\ \mathrm{m/s^2} \approx 360\ g$.