

O równoważności dwóch słynnych nierówności

Chyba nie sposób wyobrazić sobie kogoś, kto w latach szkolnych interesując się prawdziwie matematyką nie zetknąłby się z nierównością Bernoulliego czy też z nierównością Cauchy'ego. Są to bodaj najbardziej znane nierówności elementarne.

Nierówność Bernoulliego to nierówność postaci

$$(B) \quad (1+x)^n \geq 1+nx,$$

prawdziwa dla każdego $x > -1$ oraz dla każdego całkowitego, nieujemnego n .

Nierównością Cauchy'ego nazywa się nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb nieujemnych, tj. nierówność

$$(C) \quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, x_1, x_2, \dots, x_n – liczbami nieujemnymi.

Poniżej wykazemy, że nierówności te są równoważne.

1. (B) \Rightarrow (C).

Przyjmijmy od razu, że wszystkie x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) są dodatnie, gdyż jeśli któraś z nich jest zerem, to nie ma czego dowodzić.

Wprowadźmy, dla wygody, następujące oznaczenia:

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Dla każdego $k = 2, 3, \dots, n$, mamy $\frac{A_k}{A_{k-1}} > 0$, czyli $\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1 > -1$, więc na mocy nierówności Bernoulliego mamy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)^k &= \left(1 + \left(\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1\right)\right)^k \geq 1 + k \cdot \left(\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1\right) = \\ &= \frac{A_{k-1} + kA_k - kA_{k-1}}{A_{k-1}} = \frac{x_k}{A_{k-1}}, \end{aligned}$$

czyli

$$A_k^k \geq x_k A_{k-1}^{k-1}.$$

Wobec tego

$$A_n^n \geq x_n A_{n-1}^{n-1} \geq x_n x_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geq \dots \geq x_n x_{n-1} \dots x_2 A_1^1 = G_n^n,$$

skąd

$$A_n \geq G_n.$$

2. (C) \Rightarrow (B).

Dla $n = 1$ nierówność (B) jest oczywista. Także, przy $n \geq 2$ i $-1 < x \leq -\frac{1}{n}$, nie ma czego dowodzić.

Niech więc $n \geq 2$ i $x > -\frac{1}{n}$. Wówczas $nx + 1 > 0$ i na mocy nierówności (C) zastosowanej do n liczb: $1 + nx, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-1}$ mamy

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= \left(n \cdot \frac{1+x}{n}\right)^n = \left(\frac{(1+nx) + \overbrace{1+1+\dots+1}^{n-1}}{n}\right)^n \geq \\ &\geq (1+nx) \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-1} = 1+nx. \end{aligned}$$

Henryk PAWŁOWSKI

Przemiany jądrowe – współczesna alchemia

Maria KACZMARCZYK

Promieniotwórczość naturalna niektórych jąder atomowych (*Delta* 11/1992) nie wyczerpuje całości zjawisk fizyki jądrowej, w których przemiany jądrowe prowadzą do wyzwolenia energii. Cechą rozpadów promieniotwórczych jest to, że przebiegają one samorzutnie, bez żadnej ingerencji zewnętrznej. Jednym z warunków ich wystąpienia jest zachodzenie tzw. dodatniego bilansu energetycznego. Oznacza to, że energia spoczynkowa jądra rozpadającego się musi być większa od sumy energii spoczynkowych jądra końcowego i emitowanych cząstek.

Na przykład dla rozpadu alfa jądra polonu ^{210}Po (liczba masowa $A = 210$, liczba atomowa $Z = 84$), w wyniku którego powstaje jądro ołowiu ^{206}Pb ($A=206$, $Z = 82$), bilans taki opisuje równanie

$$(1) \quad Q = M(^{210}\text{Po})c^2 - (M(^{206}\text{Pb}) + M(^4\text{He}))c^2 > 0.$$

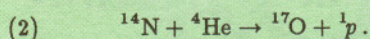
Symbolem Q oznaczono energię tego rozpadu, $M(A)$ oznacza masę jądra atomu A .

Energia spoczynkowa E_0 obiektu o masie spoczynkowej m_0 wyraża się wzorem Einsteina $E_0 = m_0 c^2$, w którym c jest prędkością światła w próżni. Jeśli masa będzie wyrażona w megaelektronowoltach (MeV), to współczynnik przeliczeniowy masy na energię będzie równy $c^2 = 1$.

Dla wymienionego rozpadu (w przypadku, gdy jądro ^{206}Pb powstaje w najniższym stanie energetycznym) energia ta jest równa $Q = 5,407$ MeV.

Rok 1919 wyznaczył początek nowej dziedziny badań z zakresu tzw. sztucznych przemian jądrowych. W tym roku angielski fizyk Ernest Rutherford przeprowadził pierwszą sztuczną przemianę jądrową dokonując zderzenia cząstek alfa (jąder ^4He) z jądrami azotu ^{14}N . Jak się okazało, zderzenie to nie miało wyłącznie charakteru sprężystego zderzenia dwu klasycznie rozumianych kuleczek, lecz doprowadziło do wytworzenia jądra tlenu ^{17}O i protonu. Przemianę tę, zwaną również reakcją jądrową, można

zapisać symbolicznie następująco:



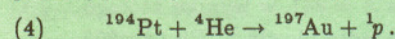
Wyrażenie na energię Q reakcji, dla przypadku gdy jądro tlenu ${}^{17}\text{O}$ powstaje w najniższym (podstawowym) stanie energetycznym, jest dane wzorem

$$(3) \quad Q = (M({}^{14}\text{N}) + M({}^4\text{He}))c^2 - (M({}^{17}\text{O}) + M({}^1\text{p}))c^2.$$

Doświadczenie Rutherforda miało znaczenie epokowe. Urzeczywistniło ono po raz pierwszy odwieczne marzenia alchemików o przemianie pierwiastków.

W wiekach VIII–XVI alchemicy poszukiwali „kamienia filozoficznego”, tj. substancji, która mogłaby przemieniać metale pospolite w cenny metal szlachetny – złoto. Posiadanie kamienia filozoficznego otwierałoby właścicielowi drogę do nieograniczonego bogactwa.

Od czasu Rutherforda przebadano ogromną liczbę rozmaitych reakcji jądrowych, w tym także takie, w których powstają atomy złota, na przykład:



W tym miejscu Czytelnik może ze zdziwieniem zapytać: skoro teraz znamy sposoby na realizację marzeń alchemików, to dlaczego nie produkujemy tyle złota, aby było go pod dostatkiem? Odpowiedź jest prosta: to kosztuje, i to dużo!

Otóż w przypadku procesu (4) energia reakcji jest ujemna: $Q = -8,436 \text{ MeV}$. Jest to przykład tzw. reakcji progowej. Oznacza to, że warunkiem koniecznym do jej zaistnienia jest, aby cząstki alfa były przyspieszane do energii kinetycznej co najmniej równej $8,610 \text{ MeV}$ (energia kinetyczna musi być wyższa niż Q , gdyż w trakcie zderzenia platyna doznaje odrzutu). A z tym wiąże się olbrzymie koszty budowy akceleratorów przyspieszających naładowane cząstki do odpowiednio wysokich energii, co w połączeniu z niewielką efektywnością zachodzenia żądanych reakcji jądrowych czyni taką produkcję wielce nieopłacalną.

Atomy złota mogą być wytwarzane również w procesach pośrednich. Przykładem może być reakcja wychwytu radiacyjnego neutronów (oznaczana zapisem (n, γ)) przez jądra platyny ${}^{196}\text{Pt}$, a następnie rozpad β^- wytworzonych

Jest w próżni niespożyta siła

Anna OKOPIŃSKA

W fizyce próżnią nazywa się najprostszy stan układu fizycznego, a więc stan o najniższej energii. W fizyce klasycznej (niekwantowej) jest to stan całkowitego spoczynku. Natomiast w fizyce kwantowej nie może istnieć stan, w którym nic się nie dzieje. Dla przykładu rozważmy oscylator harmoniczny – cząstkę o masie m pod działaniem siły Hooke’a $F = -m\omega^2 x$. Przyjmijmy, że prędkości są małe w porównaniu z prędkością światła i możemy używać praw fizyki nierelatywistycznej.

Ruch oscylatora klasycznego odbywa się zgodnie z rozwiązaniem równania Newtona

$$(1) \quad x(t) = A \sin(\omega t), \quad p(t) = mA\omega \cos(\omega t),$$

gdzie $x(t)$ jest wychyleniem z położenia równowagi, a $p(t)$ jest pędem cząstki.

Całkowita energia dana jest więc przez zależność

$$(2) \quad E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

i najniższa możliwa wartość $E = 0$ odpowiada $A = 0$, a więc sytuacji, gdy $x = 0$ i $p = 0$.

W fizyce kwantowej sytuacja jest zupełnie inna. Oscylator kwantowy może znajdować się w stanach numerowanych liczbami całkowitymi $n \geq 0$, którym odpowiada energia

$$(3) \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

gdzie $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, a h jest stałą Plancka. Tak więc najniższa energia wynosi

$$(4) \quad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

i jest różna od zera. Efekt ten, nazywany drganiami zerowymi, wyjaśnia wiele własności ciał fizycznych, na przykład ciepła właściwe, paramagnetyzm, niekrzepliwość ${}^4\text{He}$ oraz anomalne rozpraszanie promieni X na kryształach w niskich temperaturach.

Współczesna teoria cząstek elementarnych opisuje świat przy użyciu pól kwantowych. Są to pola materii (elektronów, kwarków, neutronów, ...) i pola cząstek przenoszących oddziaływania (fotonów, gluonów, ...). Pole kwantowe można sobie wyobrażać jako układ nieskończenie wielu oscylatorów harmonicznym. Próżnia – stan pól kwantowych o najniższej energii, nie zawierający cząstek materii ani kwantów oddziaływania – odpowiada drganiom zerowym oscylatorów. Fluktuacje próżni, które są źródłem dodatniej energii próżni, można wyjaśnić powstawaniem wirtualnych par cząstka-antycząstka o energii ΔE , żyjących tak krótko, że spełniona jest zasada nieoznaczoności Heisenberga

$$(5) \quad \Delta t \Delta E \leq \frac{\hbar}{2}.$$

Pole kwantowe ma nieskończoną liczbę stopni swobody, gdyż w każdym punkcie przestrzeni może przybierać niezależne wartości.

Całkowita energia drgań zerowych otrzymana przez całkowanie po wszystkich stopniach swobody, równa

$$(6) \quad \sum \frac{1}{2} \hbar \omega,$$

jest nieskończona. Pojawianie się nieskończonych wartości jest dobrze znaną cechą rachunków w kwantowej teorii pola.

Nieskończoności te można wyeliminować z wyrażeń dla wielkości obserwowalnych za pomocą procedury renormalizacji. Ponieważ parametry wyjściowe teorii są niemierzalne, można przyjąć, że są one nieskończone i dobrać je tak, aby kasowały pojawiające się w rachunkach nieskończoności. Renormalizacja energii polega na dodaniu nieskończonej wielkości E_∞ dobranej tak, aby energia drgań zerowych w pustej przestrzeni była równa zero

$$(7) \quad \sum \frac{1}{2} \hbar \omega_0 + E_\infty = 0.$$

Gdy w przestrzeni umieścimy powierzchnie ograniczające, na których pola znikają, to częstości drgań zerowych ulegają modyfikacji i energia różni się od energii w pustej przestrzeni o skończoną wartość, którą możemy zmierzyć! W 1948 roku H.B. Casimir wykazał, że energia próżni dla pola elektromagnetycznego, zamkniętego pomiędzy równoległymi płaszczyznami przewodzącymi o powierzchni S i odległymi o d , wynosi

$$(8) \quad \sum \frac{1}{2} \hbar \omega + E_\infty = -\frac{\pi \hbar c S}{720 d^3}.$$

Takiej energii potencjalnej odpowiada przyciąganie się płaszczyzn z siłą równą

$$(9) \quad F_{Casimir} = \frac{\pi \hbar c}{240 d^4}$$

na jednostkę powierzchni. Przypomnijmy, że płaszczyzny są nie naładowane, więc gdyby obowiązywały prawa elektrodynamiki klasycznej, efekt taki nie mógłby wystąpić. Pomiar wykonany w 1958 roku przez M.J. Sparnaya w laboratoriach Philipsa wykazał przyciąganie się płyt metalowych odległych o $d = 0,5 \mu$ z siłą $F = 0,2 \text{ dyn/cm}^2$. Niestety, pomiary te są niezwykle trudne i do dziś nie przeprowadzono ilościowego potwierdzenia wzoru Casimira.

Rozważano też inne efekty wywołane fluktuacjami próżni w ograniczonej przestrzeni. Casimir i Polder wykazali w 1948 r., że siła oddziaływania jednostki powierzchni na atom znajdujący się w odległości d od przewodzącej płaszczyzny wynosi

$$(10) \quad F = F_{C-P} + F_{elstat} + F_{interf}.$$

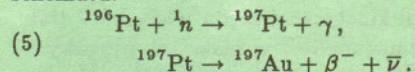
Siła Casimira-Poldera dana wyrażeniem

$$(11) \quad F_{C-P} = -\frac{3\alpha \hbar c}{2\pi d^5},$$

gdzie α jest współczynnikiem polaryzowalności cząstki, pochodzi od fluktuacji próżni i wnosi dominujący wkład przy dużych odległościach d . F_{elstat} jest oddziaływaniem elektrostatycznym dipola (powstającego na skutek fluktuacji ładunku w atomie) z płaszczyzną przewodzącą, a pozostałe wyrazy uwzględniające efekty interferencyjne można wyznaczyć przy użyciu elektrodynamiki kwantowej.

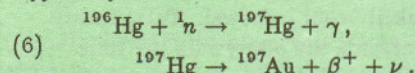
Eksperyment mający na celu potwierdzenie efektu Casimira-Poldera został przeprowadzony dopiero w 1993 roku na uniwersytecie w Yale (USA) przez grupę Hindsa. Wiązka atomów sodu była przepuszczana wzdłuż ścian klina utworzonego przez dwie płyty, które u dołu stykały się, a u góry odstęp między nimi wynosił $1,2 \mu\text{m}$. Płyty wykonane z idealnie płaskich warstw krzemionki o wymiarach $8 \times 30 \text{ mm}$ (z dokładnością 10^{-6} mm)

promieniotwórczych jąder ^{197}Pt według schematu:



Reakcje te, chociaż możliwe do przeprowadzenia, w odniesieniu do „produkcji” złota są też nieopłacalne, choćby z tej przyczyny, że platyna jest metalem droższym od złota.

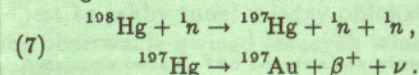
Innym przykładem pośredniego procesu prowadzącego do wytworzenia atomów ^{197}Au jest reakcja (n, γ) na rtęci, która jest względnie tanim surowcem wyjściowym:



Można ją zrealizować praktycznie, umieszczając próbkę rtęci w kanale reaktora jądrowego w strumieniu neutronów spowolnionych do energii poniżej 1 eV (tzw. neutronów termicznych). Wytworzone wtedy jądra ^{197}Hg są nietrwałe, ulegają rozpadowi promieniotwórczemu β^+ z okresem połowicznego zaniku $T_{1/2} = 64,1$ godziny.

Przez okres połowicznego zaniku pierwiastka promieniotwórczego rozumie się czas, po upływie którego połowa jąder promieniotwórczych w próbce ulega rozpadowi.

Warto jednak zauważyć, że atomy złota ^{197}Au w środowisku neutronów termicznych same wychwytyują neutrony ulegając przemianie w atomy ^{198}Au , które z okresem $T_{1/2} = 2,696$ dni ulegają rozpadowi β^- . Jądrem końcowym tego rozpadu jest rtęć ^{198}Hg . Zatem, złoto wytworzone w przykładowym procesie opisanym równaniem (6) powinno być dostatecznie szybko usuwane ze strumienia neutronów, aby zabezpieczyć je przed zniszczeniem. Uwagę tę można uczynić też w odniesieniu do wytwarzania złota w reakcji $(n, 2n)$ na rtęci ^{198}Hg poddanej oddziaływaniu neutronów prędkich o energii 14 MeV:

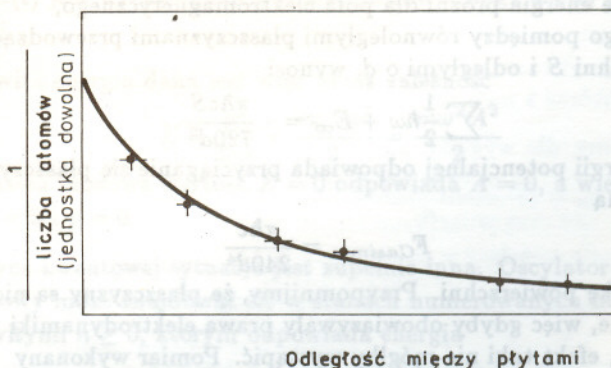
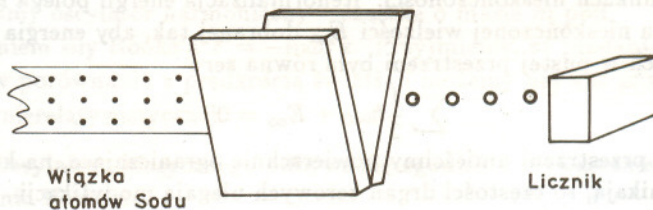


W podobny sposób, a więc wykorzystując odpowiednie reakcje jądrowe, można byłoby wytwarzać również inne drogocenne metale, na przykład platynę, srebro, rod. Jednak, jak już wspominaliśmy, główną przyczyną nieopłacalności takich prób są ogromne koszty, jakie należałoby ponieść

na zbudowanie akceleratorów cząstek naładowanych przyspieszających je do energii kinetycznej rzędu wielu MeV (jak to wymagane jest w reakcjach progowych, na przykład (4)). Koszty te znacznie przekroczyłyby wartość wytworzonych drogocennych metali. Omawiana metoda otrzymywania innych pierwiastków drogą reakcji jądrowych i procesów pośrednich jest jednak stosowana na przykład do wytwarzania izotopów promieniotwórczych, takich jak ^{24}Na , ^{32}P , ^{131}I , a nawet ^{198}Au , mających specjalne zastosowanie w medycynie. Podobnymi metodami uzyskuje się również pluton wykorzystywany jako paliwo jądrowe do produkcji broni jądrowej. Tutaj koszty wytwarzania nie odgrywają już roli.

Osiągnięty w XX wieku poziom wiedzy o budowie materii i przemianach jądrowych pozwala nam wyjaśnić istotę niepowodzeń alchemików. Stosowane przez alchemików metody, w zasadzie chemiczne, mogły najwyżej powodować zmiany w zewnętrznych powłokach elektronowych atomów nie sięgając do centralnie umieszczonego jądra atomowego. O przynależności atomu do określonego rodzaju pierwiastka chemicznego decyduje liczba protonów Z w jądrze atomowym. Nie można więc przemienić atomu jednego pierwiastka w atom innego pierwiastka (w tym przypadku w atom złota), jeżeli nie zmieni się liczby protonów w jądrze. Można tego dokonać wykorzystując reakcje jądrowe lub rozpady promieniotwórcze. Ale alchemicy nie znali budowy atomu ani nie dysponowali urządzeniami do wywoływania reakcji jądrowych, dlatego też ich poszukiwania i metody były bezskuteczne. Teraz wiemy, jak tego dokonać, i czasami w zamierzony sposób jest to czynione dla celów specjalnych. Choć koszty uzyskania złota tą drogą są wysokie, pozostaje nam satysfakcja, że wiemy, jak osiągnąć to, czego nie mogły osiągnąć pokolenia alchemików. A wiedza jest cenniejsza niż złoto!

zostały napyłone chromem i złotem. Mierzono liczbę atomów, które przeszły na różnych wysokościach od dołu klina i wykreślono wyniki pomiarów w zależności od odległości między płytami na danej wysokości. Otrzymaną zależność porównano z wynikami rachunków, w których przyjęto, że odchylenie atomów spowodowane jest siłą Casimira-Poldera. Wyniki doświadczalne zgadzają się bardzo dobrze z wynikami teoretycznymi w zakresie odległości $0,7\text{--}1,2\ \mu\text{m}$, przy których siła Casimira-Poldera wnosi dominujący wkład do całkowitej siły działającej na atomy.



Pomiar siły Casimira-Poldera stanowi ilościowe potwierdzenie różnicy energii drgań zerowych pomiędzy przestrzenią ograniczoną i nieograniczoną. Innym obserwowalnym efektem kwantowo-polowej natury oddziaływań elektromagnetycznych jest różnica energii drgań zerowych w zewnętrznym polu i bez pola. Daje ona wkład do niewielkiego przesunięcia poziomów energetycznych atomu wodoru w stosunku do przewidywań danych przez równanie Diraca. Przesunięcie to, zmierzone przez W.E. Lamba i R.C. Retherforda w latach 1947–1953, jest w znakomitej zgodności z rezultatami elektrodynamiki kwantowej. Siła Casimira-Poldera, podobnie jak przesunięcie Lamba-Retherforda, stanowi ważny dowód potwierdzający prawidłowość opisu oddziaływań elementarnych przy użyciu pól kwantowych.



Rozwiązanie zadania M 697. Łatwo zauważyć, korzystając ze wzoru dwumianowego, że liczba $(\sqrt{6} + 2)^{2n} + (\sqrt{6} - 2)^{2n}$ jest całkowita. Oczywiście, jest ona większa od $(\sqrt{6} + 2)^{2n}$. Ponieważ $0 < (\sqrt{6} - 2)^{2n} < 1$, to

$$N = (\sqrt{6} + 2)^{2n} + (\sqrt{6} - 2)^{2n}.$$

Ponownie korzystając ze wzoru dwumianowego mamy

$$\begin{aligned} N &= (10 + 4\sqrt{6})^n + (10 - 4\sqrt{6})^n = 2^n((5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n) = \\ &= 2^n \left((5^n + 5^n) + \binom{n(n-1)}{2} \cdot 5^{n-2} \cdot 4^2 \cdot 6 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 5^{n-2} \cdot 4^2 \cdot 6 + \dots \right) = 2^{n+1} \cdot k \end{aligned}$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ (liczba w największym nawiasie w poprzedniej linijce jest parzysta, bowiem każdy składnik jest naturalny i występuje dwukrotnie).