O równoważności dwóch słynnych nierówności

Chyba nie sposób wyobrazić sobie kogoś, kto w latach szkolnych interesując się prawdziwie matematyką nie zetknąłby się z nierównością Bernoulliego czy też z nierównością Cauchy'ego. Są to bodaj najbardziej znane nierówności elementarne.

Nierówność Bernoulliego to nierówność postaci

$$\text{(B)} \qquad (1+x)^n \geq 1+nx,$$

prawdziwa dla każdego $x > -1$ oraz dla każdego całkowitego, nieujemnego n.

Nierównością Cauchy'ego nazywa się nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb nieujemnych, tj. nierówność

$$\text{(C)} \qquad \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – liczbami nieujemnymi.

Poniżej wykażemy, że nierówności te są równoważne.

1. (B) $\Rightarrow$ (C).
Przyjmijmy od razu, że wszystkie x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ są dodatnie, gdyż jeśli któraś z nich jest zerem, to nie ma czego dowodzić.

Wprowadźmy, dla wygody, następujące oznaczenia:

$$A_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Dla każdego $k = 2, 3, \ldots, n$, mamy $\dfrac{A_k}{A_{k-1}} > 0$, czyli $\dfrac{A_k}{A_{k-1}} - 1 > -1$, więc na mocy nierówności Bernoulliego mamy:

$$\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)^k = \left(1+\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}-1\right)\right)^k \geq 1+k\cdot\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}-1\right) =$$

$$= \frac{A_{k-1}+kA_k-kA_{k-1}}{A_{k-1}} = \frac{x_k}{A_{k-1}},$$

czyli

$$A_k^k \geq x_k A_{k-1}^{k-1}.$$

Wobec tego

$$A_n^n \geq x_n A_{n-1}^{n-1} \geq x_n x_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geq \ldots \geq x_n x_{n-1}\ldots x_2 A_1^1 = G_n^n,$$

skąd

$$A_n \geq G_n.$$

2. (C) $\Rightarrow$ (B).
Dla $n = 1$ nierówność (B) jest oczywista. Także, przy $n \geq 2$ i $-1 < x \leq -\dfrac{1}{n}$, nie ma czego dowodzić.

Niech więc $n \geq 2$ i $x > -\dfrac{1}{n}$. Wówczas $nx+1 > 0$ i na mocy nierówności (C) zastosowanej do n liczb: $1+nx, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1}$ mamy

$$(1+x)^n = \left(n\cdot\frac{1+x}{n}\right)^n = \left(\frac{(1+nx)+\overbrace{1+1+\ldots+1}^{n-1}}{n}\right)^n \geq$$

$$\geq (1+nx)\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{n-1} = 1+nx.$$

Henryk PAWŁOWSKI

Przemiany jądrowe – współczesna alchemia

Maria KACZMARCZYK

Promieniotwórczość naturalna niektórych jąder atomowych (*Delta* 11/1992) nie wyczerpuje całości zjawisk fizyki jądrowej, w których przemiany jądrowe prowadzą do wyzwolenia energii. Cechą rozpadów promieniotwórczych jest to, że przebiegają one samorzutnie, bez żadnej ingerencji zewnętrznej. Jednym z warunków ich wystąpienia jest zachodzenie tzw. dodatniego bilansu energetycznego. Oznacza to, że energia spoczynkowa jądra rozpadającego się musi być większa od sumy energii spoczynkowych jądra końcowego i emitowanych cząstek. Na przykład dla rozpadu alfa jądra polonu ^{210}Po (liczba masowa $A = 210$, liczba atomowa $Z = 84$), w wyniku którego powstaje jądro ołowiu ^{206}Pb (A=206, $Z = 82$), bilans taki opisuje równanie

$$\text{(1)} \qquad Q = M(^{210}\mathrm{Po})c^2 - (M(^{206}\mathrm{Pb}) + M(^{4}\mathrm{He}))c^2 > 0.$$

Symbolem Q oznaczono energię tego rozpadu, $M(A)$ oznacza masę jądra atomu A.

Energia spoczynkowa E_0 obiektu o masie spoczynkowej m_0 wyraża się wzorem Einsteina $E_0 = m_0c^2$, w którym c jest prędkością światła w próżni. Jeśli masa będzie wyrażona w megaelektronowoltach (MeV), to współczynnik przeliczeniowy masy na energię będzie równy $c^2 = 1$.

Dla wymienionego rozpadu (w przypadku, gdy jądro ^{206}Pb powstaje w najniższym stanie energetycznym) energia ta jest równa $Q = 5{,}407$ MeV.

Rok 1919 wyznaczył początek nowej dziedziny badań z zakresu tzw. sztucznych przemian jądrowych. W tym roku angielski fizyk Ernest Rutherford przeprowadził pierwszą sztuczną przemianę jądrową dokonując zderzenia cząstek alfa (jąder ^4He) z jądrami azotu ^{14}N. Jak się okazało, zderzenie to nie miało wyłącznie charakteru sprężystego zderzenia dwu klasycznie rozumianych kuleczek, lecz doprowadziło do wytworzenia jądra tlenu ^{17}O i protonu. Przemianę tę, zwaną również reakcją jądrową, można