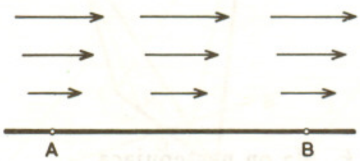
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań
30 VI 1994

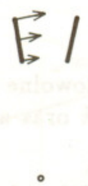
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

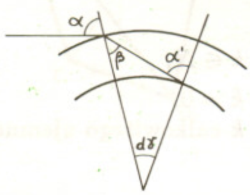
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania z fizyki nr 175, 176

Redaguje Jerzy B. BROJAN

175. Nad ziemią wieje poziomo wiatr, którego prędkość jest proporcjonalna do wysokości: na każde 100 m wysokości prędkość rośnie o 50 m/s. Prędkość dźwięku względem powietrza wynosi 330 m/s. Po jakim czasie sygnał dźwiękowy dotrze z punktu A do punktu B odległego o 2 km w kierunku wiatru (rys. 1)?
Uwaga: Ścisłe rozwiązanie tego zadania prawdopodobnie nie istnieje. Mile widziane będą więc wszelkie rozwiązania przybliżone, nawet najbardziej orientacyjne.

176. Oto fragment artykułu z jednego z zeszłorocznych numerów *Świata Nauki*, poświęconego pomiarom temperatury ziemi na różnych głębokościach i możliwościom odtworzenia w ten sposób historii zmian temperatury powietrza:
„Dobowe cykle ciepłych dni i chłodnych nocy wywołują zakłócenia jedynie w najwyższej, metrowej warstwie gleby czy skały, oscylacje zaś sezonowe (wynikające z pór roku) docierają na głębokość około 15 metrów. Cykl stuletni da się obserwować na głębokości około... metrów, a milenijny – około... metrów".
Uzupełnić wartości wykropkowane i uzasadnić. Wskazówka: Zastosować analizę wymiarową.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1993

Przypominamy treść zadań:

167. W prostoliniowym przewodniku, którego 1 metr waży 2 gramy, płynie prąd stały o natężeniu 50 A. Na jakiej wysokości zawiśnie ten przewodnik nad poziomą płaszczyzną nadprzewodzącą? Wskazówka: Pole magnetyczne we wnętrzu nadprzewodnika jest równe zeru.

168. Przezroczysta kula wykonana jest z materiału o współczynniku załamania zależnym od odległości r od środka kuli. Jaka powinna być ta zależność, aby dowolny promień światła krążył po okręgu?

167. Jeśli linie pola magnetycznego mają nie wnikać do wnętrza nadprzewodnika, to w pobliżu jego powierzchni muszą mieć kierunek styczny (poziomy). Prądy indukowane płynące po powierzchni nadprzewodnika wytwarzają więc pole takie, jak pole fikcyjnego przewodnika prostoliniowego umieszczonego pod tą powierzchnią symetrycznie do przewodnika danego. Zwrot prądu w przewodniku fikcyjnym jest przeciwny (proponujemy sprawdzenie, że pole dwóch przewodników prostoliniowych, w których płyną jednakowe prądy o przeciwnych zwrotach, jest styczne do płaszczyzny symetrii). Zatem oddziaływanie danego przewodnika z płaszczyzną jest takie, jak oddziaływanie z przewodnikiem fikcyjnym, tzn.

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2h}l,$$

gdzie h – szukana wysokość wzniesienia, l – długość przewodnika. Przyrównując tę siłę do ciężaru $\rho l g$ otrzymujemy wynik

$$h = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I^2}{\rho g} = 1{,}25\ \mathrm{cm}.$$

Zastosowana tu „metoda odbicia" jest bardziej znana w elektrostatyce, gdzie stosuje się ją do rozważania oddziaływania ładunku z płaszczyzną przewodzącą (por. np. zeszłoroczne zadanie 146).

168. Odpowiedź na powyższe pytanie najprościej znaleźć rozpatrując „skręcanie" promienia w obrazie falowym, tzn. analizując rozprzestrzenianie się frontu fali (rys. 2). Aby ten front zachowywał kierunek radialny, prędkość fali powinna być proporcjonalna do odległości od środka r, czyli współczynnik załamania $n = c/v$ powinien być odwrotnie proporcjonalny do r.

Redakcja przeprasza za nieporozumienie, w wyniku którego treść tego zadania zamieszczona w *Delcie* 11/1993 uległa zniekształceniu. Oczywiście, nie każdy promień światła będzie krążył po okręgu, lecz tylko te, dla których styczna do promienia w danym punkcie jest prostopadła do linii łączącej ten punkt ze środkiem kuli. Dla promienia biegnącego ukośnie (tzn. tworzącego w danym punkcie kąt α z kierunkiem do środka kuli) przyjmijmy, że na granicy warstwy kulistej następuje skokowa, nieskończenie mała zmiana współczynnika załamania z n do $n + \mathrm{d}n$. Prawo załamania Snella

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n + \mathrm{d}n}{n}$$

dla małej różnicy kątów sprowadza się do równania $\beta = \alpha - \operatorname{tg}\alpha\frac{\mathrm{d}n}{n}$. Po przebyciu warstwy kulistej o grubości $\mathrm{d}r$ kąt padania α' (rys. 3) znajdujemy ze wzoru $\alpha' = \beta + \mathrm{d}\gamma$, gdzie $\mathrm{d}\gamma = -\operatorname{tg}\beta\frac{\mathrm{d}r}{r} \approx -\operatorname{tg}\alpha\frac{\mathrm{d}r}{r}$ (minus ze względu na ujemny znak $\mathrm{d}r$). Gdy n jest odwrotnie proporcjonalne do r, mamy $\frac{\mathrm{d}n}{n} = -\frac{\mathrm{d}r}{r}$ i widzimy, że $\alpha' = \alpha$. Krzywą, która spełnia ostatni warunek, jest spirala logarytmiczna.

Zadania z matematyki nr 277, 278

Redaguje Marcin E. KUCZMA

277. Ciąg (a_n) jest określony przez zależności

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{a_0 + \ldots + a_n} - \sqrt{2} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Czy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny?

278. Rozwiązać w liczbach całkowitych x, y, z równanie

$$(x+y+z)^3 = 4(x^3+y^3+z^3) + 12xyz + 9.$$

Zadanie **278** zostało opracowane na podstawie propozycji zgłoszonej przez pana Krzysztofa Zapiska z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1993

Przypominamy treść zadań:

269. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną $n \geq 3$ o następującej własności: Jeżeli $T_1, \ldots, T_n$ są zbiorami trójelementowymi, z których każde dwa mają dokładnie jeden element wspólny, to istnieje wspólny element wszystkich zbiorów T_i.

270. Niech $f(x) = x^{x^x}$. Obliczyć $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{f(\sin x)}{f(x)}$.

269. Wykażemy, że liczba $n = 8$ ma żądaną własność.

Załóżmy, że każde dwa spośród danych trójelementowych zbiorów $T_1, \ldots, T_8$ mają dokładnie jeden element wspólny. Niech $T_1 = \{a, b, c\}$. Weźmy pod uwagę następujące zbiory wskaźników:

$$A = \{j:\ 2 \leq j \leq 8,\ \ a \in T_j\}, \qquad B = \{j:\ 2 \leq j \leq 8,\ \ b \in T_j\},$$
$$C = \{j:\ 2 \leq j \leq 8,\ \ c \in T_j\}.$$

Zbiory A, B, C są parami rozłączne (gdyby pewien numer j_0 należał jednocześnie np. do A i do B, to część wspólna zbiorów T_1 i T_{j_0} zawierałaby dwa różne elementy a i b, wbrew założeniu). Zbiory A, B, C w sumie wyczerpują cały zbiór $\{2, \ldots, 8\}$ (gdyby pewien numer j_0 nie należał ani do A, ani do B, ani do C, to zbiór T_{j_0} byłby rozłączny z T_1, wbrew założeniu). Wobec tego co najmniej jeden ze zbiorów A, B, C zawiera co najmniej trzy różne numery. Nie tracimy ogólności przyjmując, że jest to zbiór A i że należą do niego numery 2, 3, 4. Znaczy to, że a jest jednocześnie elementem zbiorów T_2, T_3, T_4.

Wykażemy, że a jest wówczas także elementem zbiorów T_5, T_6, T_7, T_8 (i tym samym wszystkie zbiory T_i mają element wspólny). Zgodnie z założeniem, zbiór T_5 ma element wspólny z każdym ze zbiorów T_1, T_2, T_3, T_4. Niech $x_i \in T_i \cap T_5$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Skoro T_5 jest zbiorem trójelementowym, zatem elementy x_1, x_2, x_3, x_4 nie mogą być wszystkie różne. Tak więc pewien element x zbioru T_5 należy jednocześnie do dwóch różnych zbiorów T_k, T_l $(1 \leq k < l \leq 4)$. Ale jedynym wspólnym elementem zbiorów T_k i T_l jest a. Stąd wniosek, że $x = a$. Wobec tego $a \in T_5$. W ten sam sposób dowodzimy, że $a \in T_6$, $a \in T_7$, $a \in T_8$.

Wykażemy teraz, że żadna liczba naturalna n spełniająca nierówności $3 \leq n \leq 7$ nie ma omawianej własności.

Spójrzmy na zbiory

$$T_1 = \{1,2,3\}, \quad T_2 = \{1,4,5\}, \quad T_3 = \{2,4,6\}, \quad T_4 = \{1,6,7\},$$
$$T_5 = \{2,5,7\}, \quad T_6 = \{3,4,7\}, \quad T_7 = \{3,5,6\}.$$

Każde dwa spośród nich mają dokładnie jeden element wspólny. Ustalmy n $(3 \leq n \leq 7)$. Zbiory $T_1, \ldots, T_n$ stanowią szukany przykład: już część wspólna $T_1 \cap T_2 \cap T_3$ jest pusta.

Wniosek: najmniejszą liczbą o omawianej własności jest $n = 8$.

270. Ze znanych wzorów

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} \ln x = 0, \qquad \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

wynika, że

$$\lim_{x \to 0+} \ln \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \ln x^{(x^x - 1)} = \lim_{x \to 0+} (x^x - 1) \ln x = \lim_{x \to 0+} (e^{x \ln x} - 1) \ln x =$$
$$= \lim_{x \to 0+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot x \ln x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot (\sqrt{x} \ln x)^2 = 1 \cdot 0 = 0.$$

Stąd

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = e^0 = 1$$

i ostatecznie

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(\sin x)}{f(x)} = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{f(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$