O nierówności o średnich i pewnym jej uogólnieniu

Henryk PAWŁOWSKI

Chyba nie było u nas takiej edycji Olimpiady Matematycznej, w której nie byłoby zadania dającego się rozwiązać (zawsze w elegancki sposób!) za pomocą nierówności o średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej liczb nieujemnych, zwanej powszechnie nierównością Cauchy'ego. Ileż zadań maturalnych i egzaminacyjnych jest w stanie za jej pomocą rozwiązać uczeń już klasy pierwszej szkoły średniej (a nierzadko wybitny – z klasy VII czy VIII szkoły podstawowej!).

Nie wiem, czy doczekam się, kiedy nierówność ta znajdzie swoje należne miejsce w programie nauczania matematyki obowiązującym wszystkie profile. Prosta w sformułowaniu, dająca się bardzo elementarnie udowodnić i przebogata w swoich zastosowaniach.

W niniejszym artykule zaprezentujemy bodaj najpiękniejszy jej elementarny dowód i uogólnimy ją.

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat. *Dla każdej liczby naturalnej n oraz dla dowolnych n liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, takich że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$ zachodzi nierówność*

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leq 1 . \tag{1}$$

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n.
Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste.

Rozwiązanie zadania F 876.
Prędkość elektronu wyznaczamy na podstawie bilansu energii

$$\frac{mv^2}{2} = eU\,, \text{ skąd } v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}\,.$$

Promień krzywizny w ziemskim polu magnetycznym wyznaczamy na podstawie drugiej zasady dynamiki

$$\frac{mv^2}{r} = evB \Rightarrow r = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um}{e}}\,.$$

Uwzględniając geometrię toru elektronu (rys.) mamy

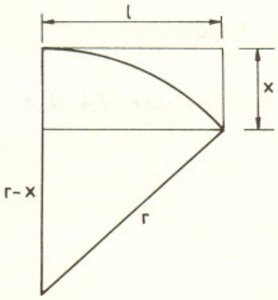
$$(r - x)^2 + l^2 = r^2\,.$$

Zakładając małe odchylenie x zaniedbujemy wyraz x^2, skąd

$$x \approx \frac{l^2}{2r}\,.$$

Ostatecznie

$$x = \frac{l^2 B}{2}\sqrt{\frac{e}{2Um}} = 2{,}1 \text{ mm}\,.$$



Prenumerata „Delty" za okres:

Prenumerata „Delty" za okres:

Prenumerata „Delty" za okres:

Dla $n = 2$ mamy

$$a_1 a_2 = a_1(2 - a_1) = -a_1^2 + 2a_1 = -(a_1 - 1)^2 + 1 \leq 1 .$$

Załóżmy więc, że dla pewnego naturalnego $n \geq 2$ oraz dla dowolnych n liczb nieujemnych o sumie równej n zachodzi nierówność (1) i rozważmy $n + 1$ takich liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = n + 1 .$$

Wśród nich jest taka liczba, która jest nie większa od 1 oraz taka, która jest nie mniejsza od 1 (w przeciwnym razie byłoby $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} > n + 1$ lub $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} < n + 1$). Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $a_n \leq 1$ i $a_{n+1} \geq 1$. Wówczas $(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) \leq 0$, czyli $a_n a_{n+1} \leq a_n + a_{n+1} - 1$.

Rozważmy teraz liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + a_{n+1} - 1$. Są one nieujemne, jest ich n oraz ich suma wynosi n.

Zatem, na mocy założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1}(a_n + a_{n+1} - 1) \leq 1 .$$

Stąd oraz z poczynionej wcześniej uwagi wynika, że

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n a_{n+1} \leq a_1 a_2 \ldots a_{n-1}(a_n + a_{n+1} - 1) \leq 1 ,$$

czyli, że $a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \leq 1$.

Kończy to dowód kroku indukcyjnego oraz dowód słuszności lematu dla dowolnej liczby naturalnej n. ■

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Wówczas liczby

$$\frac{n x_i}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

też są dodatnie, jest ich n oraz ich suma wynosi n. Na mocy lematu otrzymujemy

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{n x_i}{x_1 + \ldots + x_n} \leq 1 .$$

Nierówność ta jest równoważna kolejno nierównościom:

$$n^n \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leq 1 ,$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n ,$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} .$$

Ostatnia nierówność, to właśnie nierówność Cauchy'ego.

Zauważmy jeszcze, że gdy któraś z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest zerem, to nierówność (2) zachodzi w oczywisty sposób.

Odnotujmy na koniec tej części artykułu, iż równość w nierówności Cauchy'ego ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Jeśli $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, to istotnie średnie arytmetyczna i geometryczna tych liczb są równe. Załóżmy teraz, że średnie arytmetyczna i geometryczna $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są równe, oraz że, na przykład, $x_1 \neq x_2$. Wówczas

$$(x_1 - x_2)^2 > 0, \quad \text{czyli} \;\; x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1 x_2} .$$

Rozwiązanie zadania M 698.
Dobierzmy k tak, żeby mieć $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Wtedy wśród liczb $1, 2, \ldots, n$ dokładnie jedna dzieli się przez 2^k, pozostałe zaś mogą być podzielne tylko przez mniejsze potęgi 2. Niech $l = 2^{k-1}(2N + 1)$ oznacza połowę najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb $1, 2, \ldots, n$; wtedy, dla pewnego całkowitego M,

$$l \cdot S_n = M + \frac{l}{2^k} = l \cdot M + N + \frac{1}{2} .$$

Znaczy to, że $l \cdot S_n$, a więc tym bardziej S_n, nie jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie zadania M 695.
Zdarzenie elementarne dla doświadczenia opisanego w tym zadaniu polega w istocie na losowym wyborze jednej kuli spośród dwunastu (pięciu białych i siedmiu czerwonych); zawiły jest tylko sam sposób wybierania. Wybiera się po prostu pierwszą kulę „nie-czarną". Wszystkie zdarzenia są przy tym jednakowo prawdopodobne, bo żadna z kul nie jest wyróżniona. Szukane prawdopodobieństwo jest zatem równe 7/12.

Dla niezadowolonych z powyższego rozumowania szkicujemy niżej inne, bardziej „szkolne" (i dużo bardziej zawiłe) rozwiązanie. Tym razem zbiór zdarzeń elementarnych Ω składa się ze wszystkich 17! permutacji naszych siedemnastu kul. Zdarzenie A: „kulę czerwoną otrzymamy wcześniej niż białą" jest sumą następujących parami rozłącznych zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$:
A_1: „za pierwszym razem wylosujemy kulę czerwoną",
A_2: „za pierwszym razem wylosujemy kulę czarną, a za drugim czerwoną",
A_3: „za pierwszym i drugim razem wylosujemy kulę czarną, a za trzecim czerwoną", itd. (Skrupulatny Czytelnik, oczywiście, policzy, ile tych zdarzeń jest!). Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń parami rozłącznych to suma prawdopodobieństw, a zatem

$$p = \frac{7}{17} + \frac{6}{17} \cdot \frac{7}{16} + \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{7}{15} + \ldots$$

Prowadząc takie samo rozumowanie dla zdarzenia przeciwnego A' dostajemy drugą równość

$$1 - p = \frac{5}{17} + \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16} + \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{15} + \ldots$$

(Kule białe i czerwone zamieniły się rolami, a więc wszystkie siódemki w licznikach zamieniły się na piątki.)

Dzieląc obie równości stronami dostajemy $p/(1 - p) = 7/5$, a stąd, jak poprzednio, $p = 7/12$.

W konsekwencji otrzymujemy

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} > \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_1 x_2} + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geq$$

$$\geq \sqrt[n]{\left(\sqrt{x_1 x_2}\right)^2 x_3 \ldots x_n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

a więc sprzeczność. Jeśli więc średnie te są równe, to $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Otrzymaliśmy ostatecznie następujące

Twierdzenie. *Jeżeli n jest dowolną liczbą naturalną, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – dowolnymi liczbami nieujemnymi, to*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Wprowadźmy teraz oznaczenia

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Rozważmy macierz prostokątną $[a_{ij}]_{m \times n}$ liczb nieujemnych i obliczmy średnie geometryczne liczb każdego jej wiersza, oznaczając je odpowiednio przez $G_1, G_2, \ldots, G_m$, oraz średnie arytmetyczne liczb każdej kolumny tej macierzy, oznaczając je odpowiednio przez $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 & \quad A_2 & \quad A_3 & \quad \ldots & \quad A_n \end{matrix} & \end{array}$$

Okazuje się, że prawdziwe jest następujące

Twierdzenie

(3) $$G(A_1, A_2, \ldots, A_n) \geq A(G_1, G_2, \ldots, G_m).$$

Dowód.

a) Jeżeli któraś ze średnich $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będzie zerem, na przykład $A_1 = 0$, wówczas, oczywiście, będzie $a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{m1} = 0$, $G(A_1, A_2, \ldots, A_n) = 0$, $G_1 = G_2 = \ldots = G_m = 0$, $A(G_1, G_2, \ldots, G_m) = 0$. Nierówność jest więc w tym przypadku oczywista.

b) Niech więc $A_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas z nierówności Cauchy'ego, dla każdego $i = 1, 2, \ldots, m$, mamy

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{A_j} \geq \frac{n G_i}{G(A_1, A_2, \ldots, A_n)},$$

skąd, po dodaniu tych nierówności stronami, otrzymujemy, że

$$\frac{mA_1}{A_1} + \frac{mA_2}{A_2} + \ldots + \frac{mA_n}{A_n} \geq \frac{n \cdot m \cdot A(G_1, G_2, \ldots, G_m)}{G(A_1, A_2, \ldots, A_n)},$$

czyli, że

$$G(A_1, A_2, \ldots, A_n) \geq A(G_1, G_2, \ldots, G_m). \quad \blacksquare$$

Zauważmy, że nierówność (3) staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z kolumn jest zerowa lub gdy liczby we wszystkich wierszach są proporcjonalne.

Nierówność (3) jest uogólnieniem nierówności Cauchy'ego, choć nie tylko tej nierówności.

Rozwiązanie zadania F 875.
Przyrost ciśnienia hydrostatycznego wynosi $\mathrm{d}p = \rho\gamma \mathrm{d}r$, gdzie $\gamma = \frac{\mathrm{G}m}{r^2}$ jest natężeniem pola grawitacyjnego w odległości r, a $m = \int_0^r 4\pi\rho r^2 \mathrm{d}r$.

Zakładając liniową zmianę gęstości $\rho = \rho_1 - \rho_2 \frac{r}{R}$, gdzie R oznacza promień Ziemi, mamy

$$m = 4\pi \left(\rho_1 \frac{r^3}{3} - \rho_2 \frac{r^4}{4R}\right),$$

$$p = 4\pi\mathrm{G} \int_0^R \left(\rho_1 \frac{r}{3} - \rho_2 \frac{r^2}{4R}\right) \left(\rho_1 - \rho_2 \frac{r}{R}\right) \mathrm{d}r$$

$$= 4\pi R^2 \mathrm{G} \left(\frac{\rho_1^2}{6} - \rho_1\rho_2 \frac{7}{36} + \frac{\rho_2^2}{16}\right).$$

Z warunków zadania mamy:

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{2}\rho_0.$$

Masa Ziemi jest równa

$$M = 4\pi \left(\rho_1 \frac{R^3}{3} - \rho_2 \frac{R^3}{4}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0,$$

skąd otrzymujemy

$$4\rho_1 - 3\rho_2 = 4\rho_0.$$

Rozwiązując równania otrzymujemy

$$\rho_1 = \frac{5}{2}\rho_0, \quad \rho_2 = 2\rho_0,$$

uwzględniając zaś, że $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi R^3}$, oraz że przyspieszenie ziemskie jest równe $\frac{\mathrm{G}M}{R^2}$, otrzymujemy

$$p = \frac{23}{32\pi} \frac{g^2}{\mathrm{G}} = 330 \text{ GPa}.$$

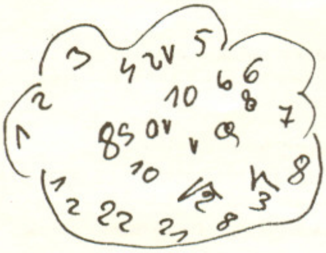
Bardziej realistyczne modele zakładają ciśnienie 370 GPa, natomiast gdybyśmy założyli stałą gęstość Ziemi, otrzymalibyśmy

$$p = \frac{3}{8\pi} \frac{g^2}{\mathrm{G}} = 172 \text{ GPa}.$$

1. Rozważmy macierz kwadratową $n \times n$ postaci

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_1 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.



Wówczas
$G_1 = G_2 = \ldots = G_n = G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oraz
$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, a nierówność (3) przyjmuje postać nierówności Cauchy'ego

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq G(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

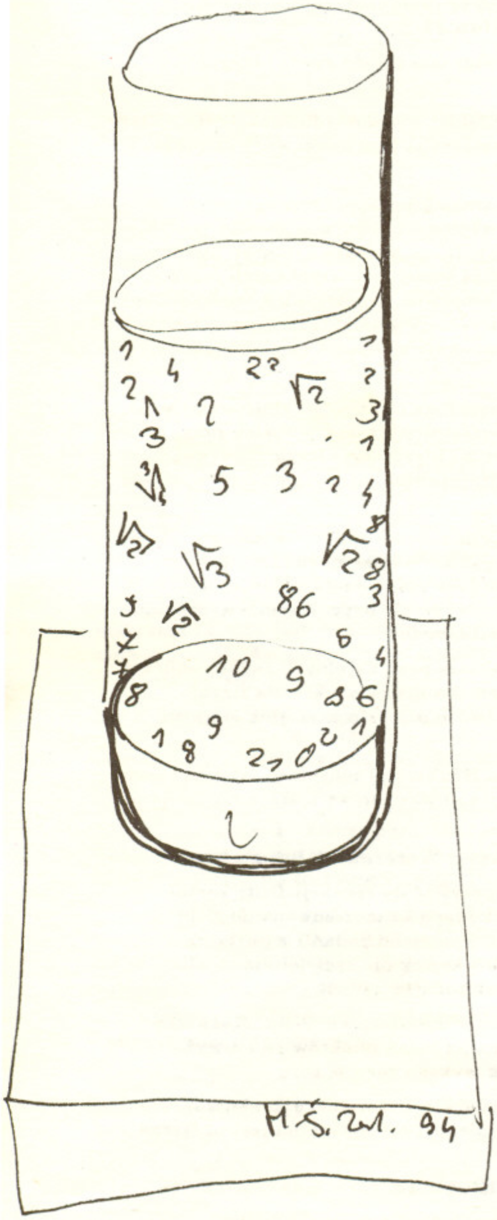
2. Jeżeli byśmy, na przykład, rozważyli macierz prostokątną $n \times 2$ postaci takiej jak obok, to nierówność (3) przyjęłaby postać

$$\begin{bmatrix} a_1^2 & b_1^2 \\ a_2^2 & b_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n^2 & b_n^2 \end{bmatrix},$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \cdot \frac{b_1^2 + \ldots + b_n^2}{n}} \geq \frac{|a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \ldots + |a_n b_n|}{n},$$

z której bez trudu otrzymamy znaną nierówność Schwarza, tj. nierówność

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2.$$



3. A teraz rozważmy m ciągów liczb nieujemnych

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}; \quad a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}; \quad \ldots; \quad a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$$

oraz liczby wymierne dodatnie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, których suma wynosi 1. Sprowadźmy te liczby do wspólnego mianownika M:

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{M}, \quad \alpha_2 = \frac{A_2}{M}, \quad \ldots, \quad \alpha_m = \frac{A_m}{M},$$

gdzie $A_1, A_2, \ldots, A_m$ są liczbami naturalnymi oraz ich suma wynosi M.

Spójrzmy na macierz $n \times M$ postaci

$$\left[\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{11} & \ldots & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} & \ldots & a_{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1n} & \ldots & a_{1n} \end{matrix}}_{A_1 \text{ kolumn}} & \underbrace{\begin{matrix} a_{21} & a_{21} & \ldots & a_{21} \\ a_{22} & a_{22} & \ldots & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & a_{2n} & \ldots & a_{2n} \end{matrix}}_{A_2 \text{ kolumn}} & \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \\ \ddots \\ \ldots \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} a_{m1} & a_{m1} & \ldots & a_{m1} \\ a_{m2} & a_{m2} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mn} & a_{mn} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}}_{A_m \text{ kolumn}} \end{matrix}\right]$$

Widzimy, że nierówność (3) przyjmuje postać

$$a_{11}^{\alpha_1} a_{21}^{\alpha_2} \ldots a_{m1}^{\alpha_m} + a_{12}^{\alpha_1} a_{22}^{\alpha_2} \ldots a_{m2}^{\alpha_m} + a_{1n}^{\alpha_1} a_{2n}^{\alpha_2} \ldots a_{mn}^{\alpha_m} \leq$$
$$\leq (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n})^{\alpha_1} \cdot (a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2n})^{\alpha_2} \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot (a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn})^{\alpha_m},$$

a więc postać znanej nierówności Höldera.

4. Weźmy teraz pod uwagę macierz

$$\left[\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} a_1^\beta & a_1^\beta & \ldots & a_1^\beta \\ a_2^\beta & a_2^\beta & \ldots & a_2^\beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^\beta & a_n^\beta & \ldots & a_n^\beta \end{matrix}}_{\alpha} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}}_{\beta - \alpha} \end{matrix}\right],$$

gdzie $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ i $\alpha \leq \beta$.

Wówczas, jeżeli obie strony otrzymanej dla tej macierzy nierówności (3) podniesiemy do potęgi α^{-1}, to otrzymamy kolejną znaną nierówność o średnich potęgowych, czyli nierówność

$$\left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$