Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+3$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1993 upływa 28 lutego 1994). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. **4**), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian regulaminu.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 261 (WT=2,33) i 262 (WT=3,06)
z numeru 5/1993

Lesław Skrzypek	– Rzeszów	49,34
Piotr Kumor	– Olsztyn	2-47,51
Janusz Olszewski	– Suwałki	1-45,63
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	7-43,33
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	1-42,82
Józef Siwy	– Łaziska Górne	1-42,42
Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	41,46
Mirosław Matlęga	– Skoczów	38,76
Jan Ciach	– Ostrowiec Świętokrzyski	3-37,72
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	2-34,66
Leszek Krzywonos	– Ornatowice	32,51
Krystyna Witek	– Ostrów Maz.	1-32,00
Marek Karaś	– Tarnów	31,81
Łukasz Wiechecki	– Legnica	31,48
Jan Kraszewski	– Legnica	30,77
Tomasz Kulpa	– Katowice	29,64
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	2-28,44
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	28,00
Ryszard Pagacz	– Zawadzkie	2-27,16
Paweł Lizak	– Puławy	26,53
Mikołaj Rotkiewicz	– Warszawa	1-25,42
Waldemar Pompe	– Warszawa	24,22

Legenda (przykładowo): stan konta 7-43,33 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył **44** punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma **43,33** punktów.

Trzech uczestników w tej właśnie rundzie przekroczyło próg **44** punktów: L. Skrzypek – po raz pierwszy, J. Olszewski – po raz drugi oraz P. Kumor – po raz trzeci, zostając trzynastym Weteranem matematycznego **Klubu 44**.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1991, 1992 lub 1993.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście, jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani **Klubu 44M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): J. Janowicz (7), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik, M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach, M. Prauza, P. Kumor
(jeśli uczestnik przekroczył barierę **44** punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie **Klubu 44M** (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej):
„dwukrotni": Z. Bartold, A. Czornik, P. Gadziński, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, H. Kornacki, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, K. Pióro, S. Solecki, T. Wietecha, G. Zakrzewski;
„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Kasperski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, A. Langer, R. Latała, J. Mańdziuk, M. Marczak, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, W. Olszewski, M. Roman, A. Ruszel, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus.

275. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ spełniające warunki

$$f(f(f(x))) = f(x) \geq 0 \qquad \text{dla wszystkich } x \in \mathbf{R}.$$

276. Cięciwy AC i BD okręgu o środku O przecinają się w punkcie P. Okręgi opisane na trójkątach PAB i PCD przecinają się w punktach P oraz Q. Zakładamy, że O, P, Q są trzema różnymi punktami. Dowieść, że kąt OQP jest prosty.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1993

Przypominamy treść zadań:

267. Dowieść, że jeśli $Q_n = (a^n + b^n + c^n)/n$, $a+b+c=0$, to $Q_5 = Q_2 Q_3$.

268. Udowodnić, że $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} = F_n$, gdzie $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla $n \geq 0$.

267. Liczby a, b, c są pierwiastkami równania $x^3 + Ax - B = 0$, gdzie $A = bc + ca + ab$, $B = abc$. Jeśli więc u jest jedną z liczb a, b, c, to $u^3 = B - Au$, a stąd

(1) $\qquad u^{n+3} = Bu^n - Au^{n+1} \qquad$ dla $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$.

Oznaczmy sumę $a^n + b^n + c^n$ przez T_n. Podstawiając w (1) kolejno $u = a$, $u = b$, $u = c$ i dodając stronami dostajemy związki

(2) $\qquad T_{n+3} = BT_n - AT_{n+1} \qquad$ dla $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$.

Przy tym: $T_0 = 3$, $T_1 = 0$ (z założenia); stąd $0 = T_1^2 = (a+b+c)^2 = T_2 + 2A$, czyli $T_2 = -2A$. Dalej ze wzoru (2) (dla $n = 0$ i $n = 2$):

$$T_3 = BT_0 - AT_1 = 3B,$$

$$T_5 = BT_2 - AT_3 = -2AB - 3AB = -5AB.$$

Tak więc $Q_2 = T_2/2 = -A$, $Q_3 = T_3/3 = B$, $Q_5 = T_5/5 = -AB = Q_2 Q_3$.

268. Oznaczmy podaną sumę przez S_n. Wykażemy, że S_n wyraża liczbę ciągów zero-jedynkowych długości n, kończących się jedynką i nie zawierających dwóch zer pod rząd. Ciąg spełniający te warunki nazwijmy „dobrym".

Weźmy pod uwagę dowolny dobry ciąg długości n i przypuśćmy, że jest w nim dokładnie k zer. Po każdym zerze musi wystąpić jedynka; ciąg jest więc zbudowany z k bloków 01 oraz jeszcze z $n - 2k$ jedynek. Mamy więc $n - k$ „cegiełek" dwóch rodzajów, odpowiednio k oraz $n - 2k$ każdego rodzaju. Możliwych ustawień mamy $\binom{n-k}{k}$, bo na tyle sposobów można wybrać k miejsc, na których kładziemy „cegiełki" pierwszego rodzaju. Ponieważ k może przyjąć wartości od 0 do $[n/2]$, zatem mamy istotnie S_n dobrych ciągów długości n.

Zauważmy teraz, że każdy dobry ciąg długości $n+2$ ma jedną z następujących dwóch postaci: albo na początku jedynka, a po niej dowolny dobry ciąg długości $n+1$, albo na początku zero, potem jedynka, a dalej dowolny dobry ciąg długości n. Stąd wynika rekurencja $S_{n+2} = S_n + S_{n+1}$. Bezpośrednio sprawdzamy, że $S_1 = 1$, $S_2 = 2$ i wnosimy, że $S_n = F_n$ dla każdego n.

Pora na doroczne omówienie. Jak zwykle, uczestnicy ligi znajdują dowody i wyprowadzenia ogólniejsze lub bardziej pomysłowe od naszych „firmowych". Oto ciekawsze rozwiązania zadań oraz uogólnienia i komentarze (uczestników ligi oraz nasze). Gdy zadanie zostało zrobione przez nie więcej niż sześć osób, podajemy ich nazwiska.

Zadanie **244.** [Dany punkt P; $\sup\{\,\text{pole}(\Delta ABC)\colon |PA| + |PB| + |PC| = 1\} = ?$] (współczynnik trudności WT=2,78; liczba poprawnych rozwiązań $LPR \leq 7$). Poprawne rozwiązania przysłali: **J. Olszewski, M. Rotkiewicz, T. Wietecha, L. Skrzypek, J. Ciach**; a przy milczącym założeniu, że konfiguracja optymalna istnieje: **M. Prauza, M. Zygmunt**. Metody różne (trygonometria, rachunek wektorowy).
J. Olszewski rozważa analogiczny problem dla n-kąta wypukłego $A_1A_2\ldots A_n$ (zamiast trójkąta): wystarczy ograniczyć uwagę do wielokątów zawierających punkt P w swoim wnętrzu; oznaczając przez $B_1, \ldots, B_n$ takie punkty, by każdy z czworokątów $PA_iB_iA_{i+1}$ był równoległobokiem otrzymujemy $2n$-kąt $A_1B_1A_2B_2\ldots A_nB_n$ o ustalonym obwodzie. Korzystając z faktu (który też wymaga dowodu), że pole tego $2n$-kąta jest maksymalne, gdy jest on foremny, znajdujemy maksimum pola n-kąta $A_1A_2\ldots A_n$ przy warunku $\sum |PA_i| = 1$, równe $(1/4n)\,\mathrm{tg}\,(\pi/2n)$.

Zadanie **245.** [$\inf\{\max\limits_{P,Q,R\in H} |\angle PQR|$: H — siedmiopunktowy zbiór na płaszczyźnie$\} = ?$] (WT=2,93; LPR=4). Autorzy poprawnych rozwiązań (nie różniących się istotnie od naszego): **P. Gadziński, J. Olszewski, M. Rotkiewicz, L. Skrzypek**. Szukany kres dolny wynosi 120°; ciekawe, że ten sam wynik dostajemy rozważając zbiory ośmiopunktowe; na to zwrócił uwagę P. Gadziński.

Zadanie **247.** [A, G, H – średnie (arytm., geom., harm.) trzech liczb $a, b, c > 0 \Longrightarrow 3A^2 + G^2 \geq 4G^3H^{-1}$] ($WT$=2,45; LPR=10). Dowód chyba najzgrabniejszy przedstawili (niezależnie) panowie **J. Ciach** i **J. Olszewski**: podstawiając $a = x^{3/2}$, $b = y^{3/2}$, $c = z^{3/2}$, po prostych przekształceniach otrzymujemy do udowodnienia nierówność $U \geq W$, gdzie

$$U = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz, \quad W = 2(xy)^{3/2} + 2(yz)^{3/2} + 2(zx)^{3/2}.$$

Niech $V = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$; oczywiście, $V \geq W$ (bo $x + y \geq 2(xy)^{1/2}$). Zakładając, że $x \geq y \geq z$ oraz dodając stronami nierówności $z(x-z)(y-z) \geq 0$ i $(x-y)^2(x+y-z) \geq 0$ stwierdzamy, że $U \geq V$; koniec dowodu.

Wzmocnienie tezy, bardzo pomysłową metodą, podał **L. Skrzypek**:

$$3A^2 + A^{-1}G^3 \geq 4G^3H^{-1}.$$

Ta nierówność, po przekształceniach, przybiera postać

$$(a+b+c)(u+v+w)uvw \leq 9abc,$$

gdzie

$$u = \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}, \quad v = \sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}, \quad w = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}.$$

Można zakładać, że $u, v, w > 0$ (w przeciwnym razie $uvw \leq 0$ – przypadek trywialny). Istnieje więc trójkąt o bokach długości $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$. Dowodzona nierówność łatwo sprowadza się do następującej: $a + b + c \leq 9R^2$ (gdzie R to promień koła opisanego) – ta zaś jest znana, choć wcale nie prosta; dowód np. w książce: S.I. Zetel, *Geometria trójkąta*, Warszawa 1964, s. 62–63.

Zadanie **249.** [$a_1 = 1/(x+1)$, $a_n = \big(n/(x+n)\big)\prod_{j=1}^{n-1}\big((x-j)/(x+j)\big)$; $x > 0$ dane; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$] ($WT$=2,83; LPR=4). Dobre rozwiązania (nie prostsze od naszego): **P. Gadziński, J. Olszewski, M. Rotkiewicz** i (z drobną luką) **T. Wietecha**.

Zadanie **252.** [$W_0(x) = 1$, $W_{n+1}(x) = W_n'(x) - 2xW_n(x) \Longrightarrow W_{2k+1}(0) = 0$, $W_{2k}(0) = (-1)^k(2k)!/(k!)$] ($WT$=2,88; LPR=6). Rozwiązanie „firmowe" opierało się na spostrzeżeniu, że wielomiany $W_n(x)$ pojawiają się przy obliczaniu pochodnych kolejnych rzędów funkcji $\exp(-x^2)$. Tą samą metodą zadanie rozwiązali **P. Gadziński** i **M. Rotkiewicz**. Dobre rozwiązania przez wyprowadzenie wzorów (jawnych lub rekurencyjnych) na wszystkie współczynniki badanych wielomianów przysłali: **L. Gasiński, P. Lisak, A. Czornik** oraz **L. Skrzypek**, który zwrócił też uwagę, że zagadnienie jest opracowane w literaturze; zachodzi bowiem równość $W_n(x) = (-1)^n H_n(x)$, gdzie

$$H_n(x) = (2x)^n + \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!\,k!}\,(2x)^{n-2k}$$

to tzw. *wielomiany Hermite'a*; informacje o nich można znaleźć w każdym obszerniejszym podręczniku analizy matematycznej.

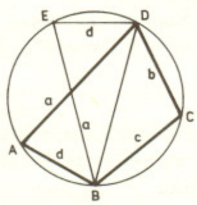
Zadanie **255.** [a, b, c, d, S – boki i pole czworokąta wpisanego w koło o promieniu R oraz opisanego na kole $\Longrightarrow S\left(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}+d^{-1}\right) \leq 2S^{1/2}+4R^2S^{-1/2}$] ($WT$=3,00; LPR=4). Wszystkie poprawne rozwiązania były zgrabniejsze od naszego. Ich autorzy: **J. Ciach**, **W. Pompe**, **J. Olszewski** oraz **A. Czornik**. Trzej pierwsi dowodzą, że wyrażenie po prawej stronie można zastąpić przez mniejszą liczbę $4\sqrt{2}R$; uzyskana w ten sposób nierówność jest bardziej naturalna i mocniejsza od tej, która była treścią zadania. Oto dowód – tak, jak go przedstawił W. Pompe:

Niech $|AD| = a$, $|CD| = b$, $|BC| = c$, $|AB| = d$ i niech E będzie punktem symetrycznym do A względem symetralnej odcinka BD (rysunek). Któryś z kątów CBE oraz CDE jest nieostry; przyjmijmy, że to kąt CDE. Wówczas $b + d = |DE| + |DC| \leq 2\sqrt{2}R\sin|\angle CDE|$ (tę ostatnią nierówność wyprowadza się nietrudno ze wzoru sinusów). A ponieważ czworokąt $ABCD$ ma koło wpisane i koło opisane, zatem zachodzą związki

$$a + c = b + d, \qquad S = \sqrt{abcd}.$$

Stąd wobec równości $\sin|\angle CBE| = \sin|\angle CDE|$:

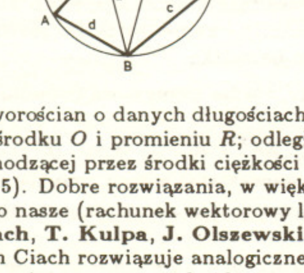
$$\begin{aligned} S(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}+d^{-1}) &= S^{-1}(bcd+acd+abd+abc) = \\ &= S^{-1}(ac+bd)(b+d) \leq \\ &\leq S^{-1}(ac+bd)\cdot 2\sqrt{2}R\sin|\angle CDE| = \\ &= S^{-1}\cdot 4\sqrt{2}R\Big((ac/2)\sin|\angle CBE| + (bd/2)\sin|\angle CDE|\Big) = \\ &= S^{-1}\cdot 4\sqrt{2}R\cdot\Big((S/2)+(S/2)\Big) = 4\sqrt{2}R. \end{aligned}$$



Zadanie **257.** [Czworościan o danych długościach krawędzi wpisany w sferę o środku O i promieniu R; odległość O od środka sfery przechodzącej przez środki ciężkości ścian = ?] (WT=2,66; LPR=5). Dobre rozwiązania, w większości tą samą metodą, co nasze (rachunek wektorowy lub wzór cosinusów): **J. Ciach**, **T. Kulpa**, **J. Olszewski**, **W. Pompe**, **L. Skrzypek**. Pan Ciach rozwiązuje analogiczne zadanie dla sympleksu n-wymiarowego; metoda identyczna, jak dla czworościanu (przypadek $n = 3$); wynik:

$$(1/n)\Big[(n+1)^2R^2 - (\text{suma kwadratów długości krawędzi})\Big]^{1/2}.$$

Zadanie **260.** [A, B, C, D, U – różne punkty na okręgu $\Longrightarrow$ rzuty punktu U na proste Simsona tego punktu względem trójkątów ABC, ABD, ACD, BCD są współliniowe] (WT=3,07; LPR=6). No, tutaj uczestnicy ligi udzielili nam prawdziwej lekcji, jak należy brać się za tego typu problemy (kto ciekawy jak *nie należy*, niech spojrzy do numeru 8/1993 na rozwiązanie „firmowe": długie rachunki na liczbach zespolonych; na naszą obronę może tylko to, że rachunki owe dają też, niejako „przy okazji", dowód istnienia prostej Simsona dla trójkąta).



Krótkie rozwiązanie geometryczne podali: **P. Bechler**, **T. Kulpa**, **W. Pompe**, **T. Wietecha**, **R. Wencel** oraz (bardziej okrężnie, choć idea w istocie ta sama) **L. Skrzypek**. Najzgrabniej przedstawił to rozwiązanie W. Pompe:

Niech B', C', D' będą rzutami U na proste AB, AC, AD; punkty te, wraz z punktem U, leżą na okręgu o średnicy AU (rysunek). Rzuty U na proste $B'C'$, $B'D'$, $C'D'$ leżą na prostej Simsona punktu U względem trójkąta $B'C'D'$ – są więc współliniowe. A te trzy proste – to właśnie proste Simsona punktu U względem trójkątów ABC, ABD, ACD. Analogicznie dowodzimy współliniowości rzutów punktu U na jego proste Simsona względem trójkątów BAC, BAD, BCD; stąd teza.

Autor rozwiązania kończy je następującą uwagą: Prosta, o której mowa w zadaniu, nosi nazwę *prostej Simsona* punktu U względem czworokąta $ABCD$. Dalej, przez indukcję: jeśli $\mathcal{W}$ jest n-kątem wpisanym w okrąg, zaś U jest pewnym punktem tego okręgu, i jeśli wiadomo już, co to prosta Simsona punktu U względem dowolnego $(n-1)$-kąta wpisanego w ten okrąg, wówczas (dowodzi się, że) rzuty punktu U na jego proste Simsona względem wszystkich $(n-1)$-kątów wyznaczonych przez wierzchołki wielokąta $\mathcal{W}$ leżą na jednej prostej, która nazywa się *prostą Simsona* punktu U względem n-kąta $\mathcal{W}$.

Start tego postępowania indukcyjnego – czyli istnienie prostych Simsona dla trójkątów – został w treści zadania podany „do uwierzenia", jako fakt znany. Dowód (geometryczny): patrz np. S. Straszewicz, *Zbiór zadań z olimpiad matematycznych*, tom I, zad. 82.

Zadanie **261.** [Równanie $x^n + (x+1)^n = (x+2)^n$ w liczbach naturalnych n, x] (WT=2,33; LPR=9). Autorzy poprawnych rozwiązań albo rozumowali, jak w rozwiązaniu „firmowym", albo – bardziej uciążliwie – przechodzili do metod analizy matematycznej, albo – najmniej uciążliwie – odsyłali do literatury; okazało się bowiem, że równanie to można znaleźć w jednym z popularnych zbiorów zadań.

Natomiast na 0 punktów zostały ocenione „rozwiązania" odwołujące się do Wielkiego Twierdzenia Fermata. U schyłku lata '93 nie ma w literaturze matematycznej dowodu tego twierdzenia! Praca A. Wilesa, której zaanonsowanie wywołało tak wielkie poruszenie w świecie matematycznym, jest na etapie recenzji. Warto nadmienić, że wynik tej pracy to częściowe potwierdzenie hipotezy matematyka japońskiego o nazwisku Taniyama, dotyczącej problematyki z zaawansowanej geometrii algebraicznej. (*W* $\mathbf{C}^2$ ***każda krzywa eliptyczna nad* $\mathbf{Q}$ *jest modularna*** – tak brzmi owa hipoteza; zaś Wiles w swej pracy prowadzi dowód pod dodatkowym założeniem tzw. półstabilności; samo wyjaśnienie użytych terminów wymaga przygotowania specjalistycznego.) Otóż te zagadnienia są w opinii specjalistów nieporównanie ważniejsze niż hipoteza Fermata, której prawdziwość istotnie daje się wydedukować z prawdziwości hipotezy Taniyamy (półstabilność wystarczy).

Praca Wilesa (w wersji preprintowej) liczy kilkaset stron. Podobną objętość mają (łącznie) prace, których wyniki są w niej wykorzystywane. Uczestnik naszej ligi, chcący tą metodą „zaliczyć" rozwiązanie omawianego prościutkiego równania, powinien, przede wszystkim, upewnić się, czy zasadniczy wynik został opublikowany; a gdyby tak było, powinien jeszcze (poza zacytowaniem wszystkich źródeł – por. *Regulamin*, p. **11**) wyjaśnić, w jaki sposób wynik Wilesa implikuje twierdzenie Fermata...

Oto dlaczego „Fermatowskie rozwiązania" zostały uznane za zwykły bluff.

Zadanie **262.** [Czy istnieje płaski zbiór wypukły, który można podzielić trzema prostymi na siedem części o równych polach?] (WT=3,06; LPR=4). Nie istnieje. A dokładniej: jeśli sześć części przylegających do brzegu figury ma równe pola, to pole środkowego trójkąta nie przekracza 1/8 pola całej figury. Dowód podaje np. B. Grünbaum w książce *Etiudy po kombinatornoj geometrii i teorii wypukłych tieł*, Moskwa 1971, s. 52. I do tego właśnie odsyłacza sprowadzają się cztery dobre rozwiązania (**A. Czornik**, **P. Kumor**, **L. Skrzypek**, **R. Wencel**).

Nie da się ukryć, nie udała się nam ta ostatnia przedwakacyjna seria: oba zadania (261, 262) znajdują się w nietrudno dostępnych książkach; my zaś nie zadaliśmy sobie trudu, aby się o tym zawczasu przekonać. Za niefrasobliwość przepraszamy.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 159 (WT=3,85) i 160 (WT=2,90) z numeru 5/1993

Przemysław Gworys	– Częstochowa	1-37,72
Tomasz Wietecha	– Tarnów	1-33,90
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	3-29,11
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	28,96
Anna Gluza	– Toruń	1-24,35
Andrzej Borowski	– Aleksandrów Kujawski	1-23,81
Dariusz Wilk	– Rzeszów	18,75
Konrad Banaszek	– Gdynia	13,70
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	12,08
Roman Wencel	– Komprachcice	11,60
Sławomir Oszwałdowski	– Grudziądz	9,70
Aleksander Surma	– Myszków	2-9,50
Artur Poliński	– Koszalin	9,14
Paweł Perkowski	– Szczecin	2-7,09
Adam Sikorski	– Lublin	3-6,95
Stanisław Świątek	– Kłodzko	6,50
Artur Stępień	– Bełchatów	5,97
Leszek Motyka	– Kraków	1-5,80
Arkadiusz Kowalski	– Lublin	5,63
Andrzej Rostworowski	– Kraków	5,17

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1991–1993, oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 5 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Pozostali członkowie **Klubu 44F** (alfabetycznie; liczba w nawiasach oznacza wielokrotność przekroczenia 44 punktów):
Piotr Bala (3),
Wiesław Kacprzak (1),
Jerzy Lipkowski (2),
Boguslaw Mikielewicz (1),
Roman Musiał (1),
Tomasz Rawlik (1),
Robert Repucha (1),
Jacek Stelmach (1),
Leszek Szalast (1),
Piotr Wach (1).

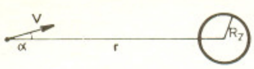
Zadania z fizyki nr 173, 174

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań 31 V 1994

173. Porcję mięsa o temperaturze +5°C włożono do zamrażalnika, w którym temperatura wynosi −18°C, a jednocześnie taką samą porcję mięsa o temperaturze −18°C przełożono z zamrażalnika do komory lodówki (gdzie temperatura wynosi +5°C). Niech t_1 oznacza czas, po którym pierwsza porcja osiągnie temperaturę −15°C, a t_2 – czas, po którym druga porcja osiągnie temperaturę +2°C. Który z tych czasów jest dłuższy i ile razy (czy też są one jednakowe)? Wystarczy ocena przybliżona.
Wskazówka: Mięso składa się głównie z wody. Niezbędne dane wziąć z tablic.

174. Planetoida o masie $m = 50$ ton znajduje się w odległości $r = 100$ tys. km od środka Ziemi (rys. 1). Czy planetoida minie Ziemię, czy rozbije się o jej powierzchnię? Czy porusza się po torze eliptycznym, parabolicznym czy hiperbolicznym? Promień Ziemi jest równy 6370 km.



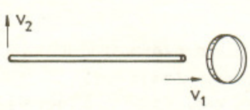
Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1993

Przypominamy treść zadań:

165. Dzielnicowy mówił, pokazując ręką widoczne za ogrodzeniem budynki szklarni:
– Właściciel wszystko ogrzewa elektrycznie, a rachunki płaci niewielkie. Jak on to robi?
– A czy nie podłączył się do wysokiego napięcia? – zapytał inspektor Wnikliwy wskazując przewody linii przesyłowej biegnącej wzdłuż drogi.
– Zastanawiam się, czy to byłoby możliwe – powiedział przyglądając się czemuś uważnie.
Czemu przyglądał się inspektor Wnikliwy i do jakich doszedł wniosków?

166. W chwili początkowej jednorodny pręt o długości l miał kierunek osi x, przy czym jeden jego koniec poruszał się wzdłuż tej osi w przód z prędkością v_1, a składowa y prędkości drugiego końca była równa v_2 (rys. 2). W tym momencie przedni koniec pręta wsunął się do wnętrza pierścienia, który może się swobodnie obracać w ustalonym miejscu. Jaki warunek muszą spełniać podane wielkości, aby pręt przeleciał przez pierścień na drugą stronę?



Rys. 2

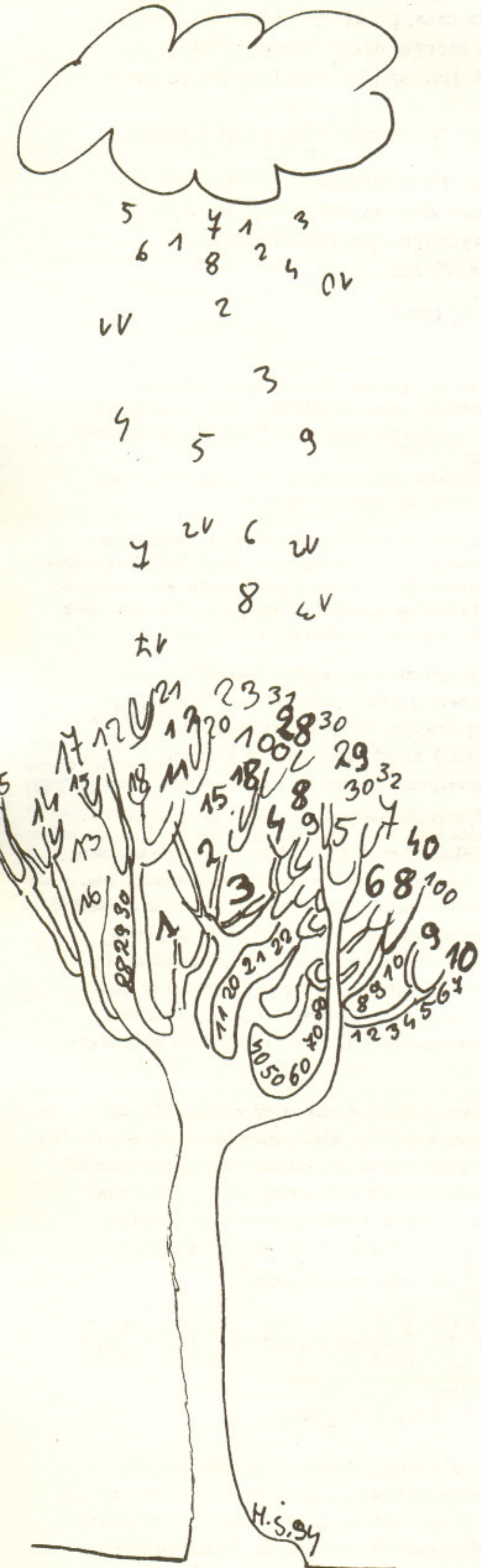
165. Inspektor przyglądał się ogrodzeniu. Druty ogrodzenia mogłyby tworzyć uzwojenie wtórne „transformatora" kradnącego energię z linii przesyłowej. Spróbujmy orientacyjnie ocenić napięcie uzyskiwane z jednego zwoju. Przyjmijmy, że górny drut biegnie w odległości 3 m, a dolny w odległości 5 m od przewodu, w którym płynie prąd 100 A. Średnia wartość indukcji magnetycznej w zwoju wynosi więc $B = \frac{1}{2\pi}\mu_0\frac{I}{r} = 2\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}\cdot\frac{100\ \mathrm{A}}{4\ \mathrm{m}} = 5\cdot 10^{-6}$ T, a podstawiając długość ogrodzenia równą 100 m mamy strumień $\Phi = 5\cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}\cdot 100\ \mathrm{m}\cdot 2\ \mathrm{m} = 10^{-3}$ Wb (ściśle rzecz biorąc należałoby obliczyć ten strumień jako całkę, ale do naszych celów podstawienie średniego pola jest zupełnie wystarczające). Jeśli częstotliwość drgań wynosi 50 Hz, a podana wartość natężenia 100 A jest wartością skuteczną, to otrzymujemy skuteczną wartość napięcia $U = 2\pi\cdot 50\ \mathrm{s}^{-1}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb} \approx 0{,}3$ V. Nie jest to zbyt wiele; co prawda zwiększając liczbę zwojów można by w zasadzie zwiększyć uzyskiwane napięcie, ale wątpliwe jest, czy opór takiego uzwojenia byłby dostatecznie mały, aby czerpana moc wystarczała do zasilania choćby jednej żarówki (nie mówiąc już o ogrzewaniu szklarni). Kradzież energii nie mogła następować tą drogą.

166. Oznaczmy odległość środka pręta od pierścienia przez d, szybkość zmiany d (czyli prędkość przesuwu) przez v, a prędkość kątową przez ω. Tak więc składowa prędkości środka pręta wzdłuż niego wynosi v, a w poprzek – ωd. Przy podanych założeniach zachowane są dwie wielkości: energia kinetyczna pręta oraz moment pędu pręta względem pierścienia. Każda z nich jest sumą dwóch wyrażeń odnoszących się do ruchu postępowego środka masy i do ruchu obrotowego względem środka masy. Korzystając ze wzoru na moment bezwładności pręta względem środka masy $I = \frac{1}{12}ml^2$ mamy równania

$$(1)\quad \frac{m}{2}v^2 + \frac{m}{2}(\omega d)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{m}{2}\left(v_1^2 + \left(\frac{1}{2}v_2\right)^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2(v_2/l)^2 = \frac{m}{2}\left(v_1^2 + \frac{1}{3}v_2^2\right),$$

$$(2)\quad I\omega + md^2\omega = \left(\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)(v_2/l) = \frac{1}{3}mlv_2\,.$$

W miarę tego, jak pręt wsuwa się do pierścienia (d maleje), rośnie – jak wynika z (2) – prędkość kątowa, osiągając dla $d = 0$ maksymalną wartość $\omega_{max} = 4v_2/l$. Z równania (1) widzimy, że prędkość przesuwu v wtedy maleje. Odpowiedź na postawione pytanie zależy od tego, czy v osiąga wartość 0 (pręt przestaje się wsuwać), czy też nie. Podstawienie $\omega = \omega_{max}$ i $d = 0$ do (1) prowadzi po przekształceniach do wyniku $v_{min}^2 = v_1^2 - v_2^2$, zatem pręt przeleci przez pierścień wtedy, gdy $v_1 > v_2$.



Zainteresowanie Czytelników ligą fizyczną wyraźnie „faluje”. Przysłano stosunkowo dużo rozwiązań zadań **155** i **157** (obwody elektryczne) oraz do zadania **149** (drabinka na Księżyc). Mniej standardowe zadania (np. wymagające zastosowania przybliżeń) są często pomijane, tak więc nikt nie tknął zadań **145** (całkowite wewnętrzne odbicie dźwięku), **148** (krążenie wody w naczyniu) i **153** (przyporządkowanie obrazów dyfrakcyjnych otworom). Bardzo małym powodzeniem cieszyły się też zadania **141** (pole ładunków dodatnich i ujemnych na przemian), **143** (wypływ wody z dwóch źródeł), **147** (zderzenia lekkiej kulki) i **158** (wiotki przewód w polu magnetycznym). Nie mogę zwłaszcza przeboleć zignorowania przez Czytelników oryginalnego zadania **153**. Zapewne niektórzy z Was zrezygnowali z przysłania listów nie mogąc przedstawić rozwiązania kompletnego, opartego na ścisłym rozumowaniu. Zadanie fizyczne różni się jednak od matematycznego – w razie konieczności można się tu kierować przybliżeniami, analogiami i rozważaniami jakościowymi, i nawet jeśli istnieje rozwiazanie dokładniejsze, to taka niepełna analiza problemu może zostać oceniona dość wysoko. Apeluję więc o próby rozwiązywania zadań nietypowych, które bynajmniej nie muszą być w istocie trudniejsze.

Przejdźmy teraz do szczegółowego omówienia niektórych zadań.

Zadanie **157** [40 jednakowych oporników] ($WT = 1,90$; $LPR = 5$). Rozwiązaniem prostszym i bardziej eleganckim od podanego w *Delcie* było wyszukanie w obwodzie punktów o jednakowym potencjale, tak że po ich zwarciu można zastosować wzory na łączenie szeregowe i równoległe oporników. W ten sposób postąpili **J. Nezdropa** i **R. Wencel**. Ciekawy był również sposób użyty przez **P. Gworysa**, polegający na „sprytnym” podziale układu na cztery części, oraz **A. Borowskiego**, który zamiast II prawa Kirchhoffa wykorzystał warunek minimum mocy cieplnej wydzielonej w układzie (co jednak było bardziej pracochłonne). Piąte bezbłędne rozwiązanie nadesłał **A. Surma**.

Zadanie **159** [wahadło na wciąganej nici] ($WT = 3,85$; $LPR = 0$). Bardzo słabe rezultaty, wynikające z przyjęcia błędnego warunku stałości energii wahadła. Powoływanie się na zasadę zachowania energii nie ma sensu, jeśli wciąganie nici może tę energię zmienić!
Rozwiązanie podane w *Delcie* 9/1993 zawiera błąd w znaku pracy, gdyż przy wciąganiu dl jest ujemne. Prawidłowy wzór końcowy ma postać

$$\alpha_1 = \alpha_0 (l_0/l_1)^{3/4}$$

(wykładnik 3/4 zamiast 1/4).

Zadanie **160** [lodówka spalająca ropę] ($WT = 2,90$; $LPR = 2$). Rozwiązania **P. Gworysa** i **A. Borowskiego** są nie tylko prawidłowe, ale nawet staranniejsze niż podane w *Delcie*, gdyż uwzględniono w nich zmieniającą się sprawność procesu oziębiania wody.

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 693. Wykazać, że dla żadnego $n > 1$ suma częściowa S_n szeregu harmonicznego

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

nie jest liczbą naturalną.
Rozwiązanie na str. 9

M 694. Na sferze danych jest 100 różnych okręgów wielkich (to znaczy leżących w płaszczyźnie przechodzącej przez środek sfery), tak że przecinają się one w 9900 punktach. W jaki sposób rozmieścić w punktach przecięcia okręgów liczby $1, 2, 3 \ldots, 9900$, by dla każdego okręgu suma położonych na nim liczb była taka sama?
Rozwiązanie na str. 5

M 695. W urnie jest pięć kul białych, sześć czarnych i siedem czerwonych. Wyciągamy po kolei wszystkie kule z urny (w losowy sposób). Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia pierwszej kuli czerwonej wcześniej niż pierwszej kuli białej?
Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Jarosław KULPA

F 375. Oszacować ciśnienie, jakie panuje we wnętrzu Ziemi. Założyć, że gęstość Ziemi rośnie liniowo w kierunku środka i że na powierzchni gęstość jest dwukrotnie mniejsza od średniej gęstości Ziemi.
Porównać uzyskane wartości ciśnienia z prostym modelem, w którym zakłada się stałą gęstość Ziemi.
Rozwiązanie na str. 10

F 376. Oszacować maksymalne odchylenie wiązki elektronowej na obrazie telewizora spowodowane ziemskim polem magnetycznym o indukcji $B = 5 \cdot 10^{-5}$ T. Wiadomo, że elektrony są przyspieszane różnicą potencjałów $U = 20\,000$ V, a droga swobodna elektronów wynosi około 20 cm.
Rozwiązanie na str. 8