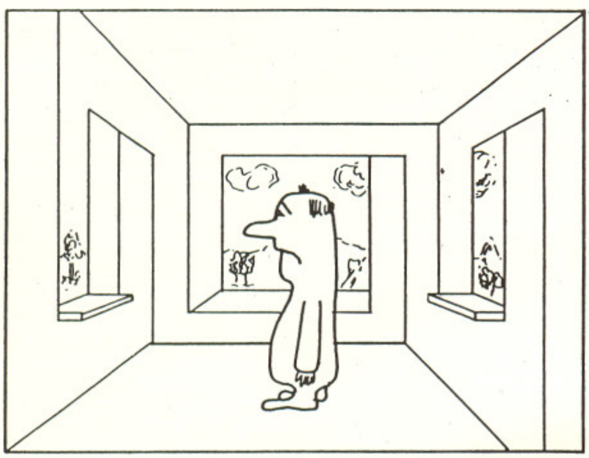
epsilon
2/94
(36)

Dwa miesiące temu zaproponowaliśmy Czytelnikom pięć zadań świątecznych pod wspólnym hasłem: „Czy Pan istnieje?". Tekst zamieszczony obok zawiera rozwiązanie zadania pierwszego – obiekt o żądanych własnościach nie istnieje. W przypadku pozostałych czterech pytań odpowiedź jest inna – opisane sytuacje mogą zajść! Opiszemy je w następnym numerze *EPSILONA*; jeśli ktoś przy rozwiązywaniu któregoś z zadań doszedł do wniosku przeciwnego, ma przed sobą miesiąc na odnalezienie (zapewne niestandardowego) tworu spełniającego zadane warunki.

A takie bryły nie istnieją... Tę serię znaczków wydano w Szwecji; w katalogach filatelistycznych nosi ona nazwę: Niemożliwe figury, nieeuklidesowe konstrukcje brył. Autorem znaczków jest Oskar Reutersvärd według sztychów, które wykonał Polak, Czesław Słania.

Rysunek z książki K. Ciesielskiego i Z. Pogody „Bezmiar matematycznej wyobraźni" – w księgarniach na początku 1994 roku.



Stuknąłem młotkiem

Czy istnieje funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ciągła, która dowolną liczbę wymierną przeprowadza w liczbę niewymierną, każdą zaś liczbę niewymierną w liczbę wymierną? ($f(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, $f(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$)?

Stary dowcip mówi, że ongiś pewnemu podróżnemu zepsuł się samochód i nikt nie potrafił auta naprawić. Dopiero zawezwany blacharz... stuknął raz młotkiem i silnik zaczął pracować! Blacharz zażądał 100 złotych; właścicielowi auta wydało się to opłatą zbyt wygórowaną (widać, że dowcip istotnie jest stary), poprosił więc o szczegółowy rachunek. Otrzymał go, o treści następującej: „Stuknąłem młotkiem – 1 zł, wiedziałem, gdzie – 99 zł".

Podobnie jest z wieloma problemami matematycznymi. Często, by odpowiedzieć, wystarczy tylko wiedzieć, gdzie – i jakim – „młotkiem" stuknąć... Tak jest i tu. Zbiór $\mathbf{R}$ i funkcje ciągłe mają wiele własności. Z czego korzystać przy próbie rozwiązania?

Wykorzystamy trzy fakty. Przed ich sformułowaniem sprecyzujmy, że gdy mówimy o przedziale (w $\mathbf{R}$), to nie będzie dla nas istotne, czy którykolwiek z końców przedziału należy do niego, czy nie. Ponadto przyjmujemy, że przedziałami są także zbiory jednoelementowe, jak i cały zbiór liczb rzeczywistych.

A oto obiecane własności:
(1) funkcja ciągła przekształca przedziały na przedziały.
(2) wszystkie liczby wymierne można ustawić w ciąg (ponumerować liczbami naturalnymi) – mówimy, że $\mathbf{Q}$ jest zbiorem przeliczalnym.
(3) jeśli przedział ma więcej niż jeden element, to jego elementów nie da się ustawić w ciąg (skończony lub nie) – przedział nie jest zbiorem przeliczalnym ani skończonym.

Wszystkie trzy fakty były znane już w XIX wieku, dziś należą do elementarza wiedzy każdego matematyka. Pierwszy to nieco inne sformułowanie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich (znanego niektórym ze szkoły). Drugi i trzeci to jedne z najbardziej podstawowych stwierdzeń teorii mnogości. Wszystkie trzy są w miarę proste do wykazania.

Przejdźmy teraz do naszego zadania. Przypuśćmy, że szukana funkcja istnieje; na mocy własności (1) zbiór $f(\mathbf{R})$ jest przedziałem. Ma on jednak co najmniej dwa elementy, bo $f(\sqrt{2})$ jest liczbą wymierną, zaś $f(0)$ nie. Nie da się zatem elementów $f(\mathbf{R})$ ustawić w ciąg (korzystamy z (3)).

Z drugiej strony jednak, $f(\mathbf{R})$ musi być skończony lub przeliczalny! Czemu? Wiemy, że $f(\mathbf{R}) = f(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}) \cup f(\mathbf{Q})$. Elementy $\mathbf{Q}$ można ponumerować liczbami naturalnymi, można zatem to zrobić także i z wszystkimi elementami dowolnego podzbioru $\mathbf{Q}$, a więc w szczególności zbioru $f(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})$, który to zbiór w $\mathbf{Q}$ jest zawarty. Ponumerować potrafimy także wszystkie liczby z $f(\mathbf{Q})$ (dlaczego?). Stąd wynika (jak?), że możemy ustawić w ciąg (skończony lub nie) wszystkie elementy z $f(\mathbf{R})$.

Warunki zadane funkcji f doprowadziły do sprzeczności. Oznacza to, że funkcja o szukanych własnościach nie istnieje.

Dowód nie jest trudny. Trzeba tylko wpaść na to, z czego skorzystać...

Krzysztof CIESIELSKI

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.