Obalanie twierdzenia Pitagorasa

Małgorzata MIKOŁAJCZYK,
Krzysztof OMILJANOWSKI

Wszystkich Czytelników, których powyższy tytuł przyprawił o szybsze bicie serca, pragniemy od razu uspokoić:
twierdzenie Pitagorasa jest prawdziwe!!!
A jednak.

Najpopularniejsze chyba z twierdzeń geometrii, zwane też twierdzeniem Pitagorasa, głosi, że:

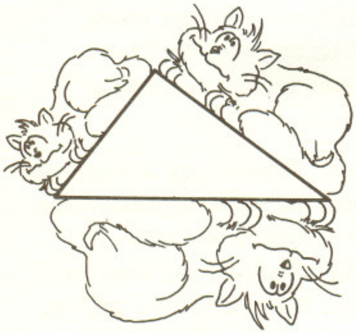
W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości boków przyległych do kąta prostego jest równa kwadratowi długości boku leżącego naprzeciw kąta prostego.

Powszechnie znane jest również twierdzenie odwrotne pozwalające z tego, że długości a, b, c boków trójkąta spełniają związek

$$a^2 + b^2 = c^2$$

wywnioskować, że jeden z kątów tego trójkąta jest prosty.

Podano wiele równoważnych wersji tego twierdzenia, a także jego uogólnień.



Rys. 1. Suma pól płaskich figur podobnych zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa polu figury podobnej do poprzednich, zbudowanej na przeciwprostokątnej.

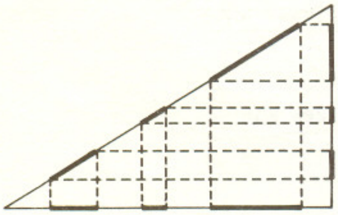
Prenumerata „Delty”
za okres:

Prenumerata „Delty”
za okres:

Prenumerata „Delty”
za okres:

Z grubsza biorąc twierdzenie Pitagorasa można uogólniać w dwóch kierunkach:

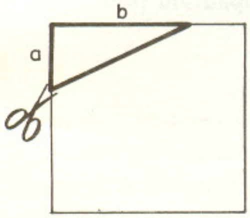
w
z
w s z e r z   i   w .
y
ż



Rys. 2. Kwadrat miary zbioru zawartego w przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów miar jego rzutów na przyprostokątne.

Uogólnienia „wszerz" dotyczą przypadku „płaskiego": na przykład figuralne twierdzenie Pitagorasa, twierdzenie o mierzalnych podzbiorach przeciwprostokątnej (rys. 1, 2) i inne.

Uogólnienia „wzwyż" dotyczą wymiarów większych niż 2. Najprostsze z nich można otrzymać zastępując w cytowanym sformułowaniu twierdzenia Pitagorasa wszystkie wielkości płaskie – ich trójwymiarowymi odpowiednikami.



Rys. 3

Trójkąt prostokątny to obcięty w pewien sposób „róg kwadratu". Trójwymiarowym odpowiednikiem kwadratu jest sześcian, długości – pole, boku – ściana, a zatem:

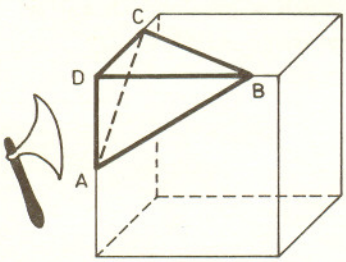
W „czworościanie prostokątnym" suma kwadratów pól ścian przyległych do kąta prostego jest równa kwadratowi pola ściany leżącej naprzeciw kąta prostego.

To twierdzenie – UTP (uogólnione twierdzenie Pitagorasa) – łatwo jest udowodnić stosując TP (twierdzenie Pitagorasa). Wprowadzając oznaczenia jak na rysunku 5, należy wykazać, że

$$(P_{ABC})^2 = (P_{ABD})^2 + (P_{ACD})^2 + (P_{BCD})^2\,,$$

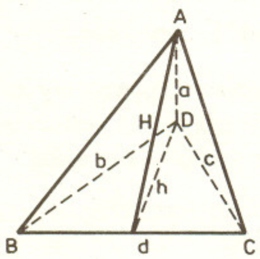
ale

$$\begin{aligned}(P_{ABC})^2 &= \frac{1}{4}d^2H^2 = \frac{1}{4}d^2(a^2+h^2) = \frac{1}{4}d^2a^2 + \frac{1}{4}d^2h^2 = \\ &= \frac{1}{4}(b^2+c^2)a^2 + \frac{1}{4}d^2h^2 = \frac{1}{4}b^2a^2 + \frac{1}{4}c^2a^2 + \frac{1}{4}d^2h^2 = \\ &= (P_{ABD})^2 + (P_{ACD})^2 + (P_{BCD})^2\,.\end{aligned}$$



Rys. 4

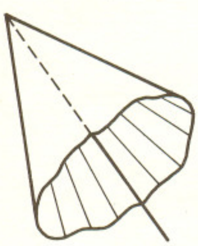
Nasze UTP można też uogólnić na jeszcze wyższe wymiary. Na przykład dla czterowymiarowego „hiperczworościanu prostokątnego" suma kwadratów objętości brył przyprostokątnych jest równa kwadratowi objętości bryły przeciwprostokątnej.



Rys. 5

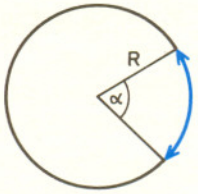
Tu mogą powstać wątpliwości – przecież odpowiednikiem podnoszenia do kwadratu dla przypadku trójwymiarowego jest podnoszenie do sześcianu, a dla czterowymiarowego – podnoszenie do czwartej potęgi. Może i tak, ale taka wersja UTP nie jest prawdziwa (by się o tym przekonać, wystarczy w „czworościanie prostokątnym" z rysunku 5 przyjąć $a = b = c = \sqrt{2}$; wtedy $P_{ABD} = P_{ACD} = P_{BCD} = 1$, a na mocy otrzymanego poprzednio wyniku $P_{ABC} = \sqrt{3}$).

Nietrudno wyobrazić sobie w tym momencie skrzywione miny matematycznych purystów. Czym są bowiem te „czworościany prostokątne"? Co oznacza prostokątność w wyższych wymiarach? Jak mierzy się niepłaskie kąty? Jak w ogóle określić takie kąty?



Rys. 6. Przedłużenia tworzących stożka wycinają bardzo „porządny" kąt. Dołączenie półprostej zawierającej wysokość rodzi dylemat: czy uważać to za kąt w przestrzeni?

Poszukując określenia kąta w przestrzeni sformułujemy takie określenie kąta na płaszczyźnie, by łatwo dało się je „przetłumaczyć" na przypadek przestrzenny: kąt to każda z części wycięta z płaszczyzny przez pewną rodzinę półprostych o wspólnym początku. Niestety, podobne określenie kąta w przestrzeni budzi jednak zastrzeżenia. Zostawmy kłopotliwe doprecyzowanie, wystarczy nam dalej intuicyjne rozumienie kąta w przestrzeni. Pamiętajmy tylko, że różnorodność kształtów takich kątów jest przeogromna. Zajmijmy się mierzeniem kątów.



Rys. 7

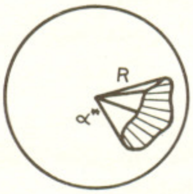
Na płaszczyźnie (mierząc w radianach):

$$\alpha = \frac{\text{długość łuku okręgu wyciętego przez kąt}}{R},$$

w przestrzeni (mierząc w steradianach):

$$\alpha^* = \frac{\text{pole części sfery wyciętej przez kąt}}{R^2},$$

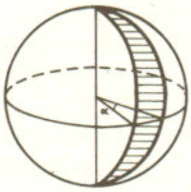
gdzie środek okręgu (sfery) leży w wierzchołku kąta.



Rys. 8

Kąt pełny w przypadku płaskim to 2π, a w przypadku przestrzennym 4π. Jak mierzyć inne kąty bryłowe?

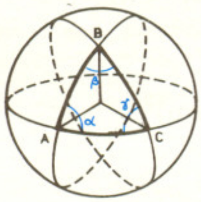
Jest to łatwe dla kątów wyciętych z przestrzeni przez dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi (kątów dwuściennych). Taki kąt wycina z kuli „cząstkę pomarańczy”, a ze sfery – coś, co wygodnie jest nazwać dwukątem sferycznym. Taki kąt o mierze α^* jest taką częścią bryłowego kąta pełnego, jaką częścią płaskiego kąta pełnego jest kąt płaski α otrzymany w prostopadłym przekroju kąta dwuściennego (rys. 9).
Czyli $\alpha^* = 2\alpha$.



Rys. 9

Nieco trudniej jest zmierzyć kąt taki, jak w wierzchołku czworościanu. Wycina on ze sfery trójkąt sferyczny. Koła wielkie, których łukami są boki trójkąta, wyznaczają trzy pary przystających dwukątów sferycznych, w sumie pokrywających całą sferę… z nadwyżką: pole trójkąta ABC oraz pole trójkąta sferycznego będącego jego symetrycznym obrazem (względem środka kuli) są liczone trzykrotnie, zatem nadwyżka to cztery pola trójkąta sferycznego ABC. Jeśli α, β, γ oznaczają miary płaskich kątów otrzymanych w przekrojach kątów dwuściennych czworościanu, a S – pole trójkąta sferycznego ABC, to

$$4\pi r^2 = 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 4S,$$



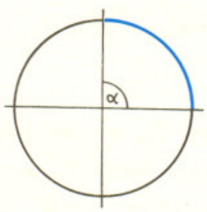
Rys. 10

stąd

$$S = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Zatem

$$\alpha^* = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

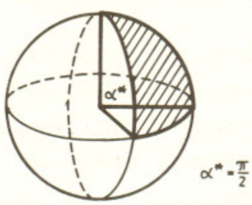


Rys. 11

Jeśli kąt bryłowy o mierze α^* wycina ze sfery pewien wypukły n-kąt sferyczny, to wykonując jego sferyczną triangulację (podział na trójkąty) otrzymujemy:

$$\alpha^* = \left(\sum \text{„płaskich miar kątów dwuściennych”}\right) - (n-2)\pi.$$

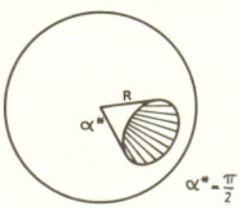
Skoro potrafimy już zmierzyć podstawowe kąty w przestrzeni, powróćmy do przestrzennego twierdzenia Pitagorasa. Na płaszczyźnie kąt prosty jest ćwiartką kąta pełnego i ma miarę $\frac{\pi}{2}$ (rys. 11). Przestrzenny kąt prosty ma również miarę $\frac{\pi}{2}$ (ale steradianów) i jest ósmą częścią kąta pełnego (rys. 12).



Rys. 12

Kąt o mierze $\frac{\pi}{2}$ może powstać także w wierzchołku stożka. Jego powierzchnia boczna jest wtedy „przyprostokątną”, a „przeciwprostokątną” jest koło odcinające na sferze czaszę kulistą o polu $\frac{\pi}{2}R^2$. Niech $R = 1$, wtedy

$$\text{pole czaszy} = 2\pi Rh = 2\pi h = \frac{\pi}{2},$$



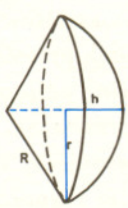
Rys. 13

stąd $h = \frac{1}{4}$,

$$r = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{1 - (1-h)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

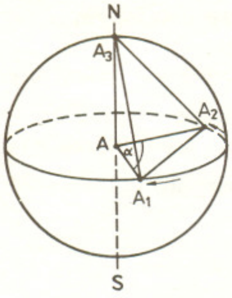
$$(\text{pole przyprost.})^2 = \left(\frac{2\pi r}{2\pi R} \cdot \pi R^2\right)^2 = \left(\frac{2\pi r}{2\pi} \cdot \pi\right)^2 = (r\pi)^2 = \frac{7}{16}\pi^2,$$

$$(\text{pole przeciwprost.})^2 = (\pi r^2)^2 = \pi^2 r^4 = \left(\frac{7}{16}\right)^2 \pi^2$$



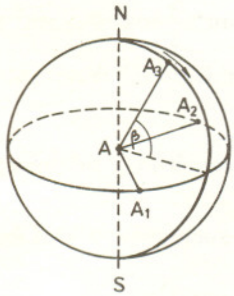
Rys. 14

i wielkości te są różne!



Rys. 15

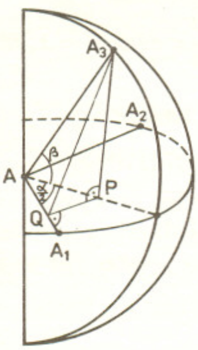
Zatem obaliliśmy nową wersję UTP? Nie, przecież w twierdzeniu płaskim wyraźnie mówi się o prostokątnym **trójkącie**. Jego trójwymiarowym odpowiednikiem nie jest przecież stożek (choćby najbardziej prostokątny), lecz prostokątny czworościan. Prostokątny – to znaczy taki, w którym jeden z kątów w wierzchołku ma miarę $\frac{\pi}{2}$ steradianów. Rozpatrzone przez nas na początku „ścięte rogi sześcianu" z całą pewnością mają kąt bryłowy w wierzchołku o mierze $\frac{\pi}{2}$. Dla tych czworościanów teza UTP jest spełniona. Ale to zapewne nie jedyne „prostokątne czworościany". Spróbujmy znaleźć inne. Czworościan foremny, niestety, odpada – „na oko" widać, że w wierzchołkach ma kąty mniejsze od prostego.



Rys. 16

Weźmy czworościan wycięty z sześcianu o krawędzi 1 płaszczyzną przechodzącą przez trzy jego wierzchołki. Umieśćmy go w kuli jednostkowej tak, aby wierzchołek o kącie prostym pokrywał się ze środkiem kuli, krawędzie AA_1 i AA_2 leżały w płaszczyźnie równika, a krawędź AA_3 wskazywała biegun północny. Rozchylamy teraz tak krawędzie AA_1 i AA_2 (dalej w płaszczyźnie równika), by zamiast kąta 90° tworzyły np. kąt 120°. W takim czworościanie kąt bryłowy w wierzchołku A jest, oczywiście, większy niż poprzednio (ma miarę $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi-\pi$).

Opuszczając teraz wierzchołek A_3 po południku połowiącym łuk A_1A_2, będziemy otrzymywali czworościany o coraz mniejszym kącie bryłowym w wierzchołku A.



Rys. 17

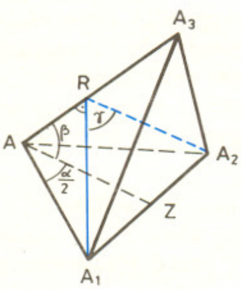
Spróbujmy znaleźć teraz takie β (kąt pomiędzy krawędzią AA_3 i płaszczyzną równika), dla którego kąt bryłowy otrzymanego czworościanu w wierzchołku A jest prosty, tzn. ma miarę $\frac{\pi}{2}$ steradianów.

Przypomnijmy, że $AA_1 = AA_2 = AA_3 = 1$. Przy ustalonym β mamy (rys. 17):

$$AP=\cos\beta\,,\quad PA_3=\sin\beta\,,\quad \frac{PQ}{AP}=\sin\frac{\alpha}{2}\,,\quad \angle A_3QP=\operatorname{arctg}\frac{PA_3}{PQ}$$

i jest to miara płaska kąta dwuściennego o krawędzi AA_1 w tym czworościanie. Jest to zarazem miara płaska kąta dwuściennego o krawędzi AA_2.
By wyznaczyć miarę kąta bryłowego (według wcześniej wyprowadzonego wzoru) w wierzchołku A, musimy jeszcze obliczyć miarę płaską kąta dwuściennego o krawędzi AA_3. Oznaczmy ją przez γ. Gdy R jest rzutem prostokątnym punktu A_1 na prostą AA_3, to

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\frac{1}{2}A_1A_2}{A_1R}\,.$$



Rys. 18

Licznik wyznaczyć łatwo:

$$A_1A_2=2\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

A mianownik? Trzeba zauważyć, że $\triangle AA_1A_3$ jest równoramienny (rys. 18), zatem wysokości opuszczone do ramion są równe, czyli

$$A_1R=QA_3=\sqrt{PQ^2+PA_3^2}\,.$$

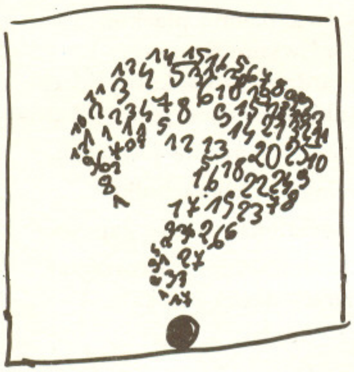
Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami

$$\text{miara kąta } A=\gamma+2\cdot\angle A_3QP-\pi$$

i „jedyne", co zostało do zrobienia, to wyznaczenie tej wielkości w zależności od parametrów α,β. Do tego potrzeba albo wiele cierpliwości i samozaparcia, albo systemu komputerowego typu DERIVE, który daje sobie radę z takimi przekształceniami. A oto, co otrzymujemy:

$$2\arcsin\frac{\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\beta+\sin^2\beta}}+2\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta}-\pi\,.$$

Taki przesympatyczny wzorek. Czym prędzej jakoś to oznaczmy, na przykład $f_\alpha(\beta)$.



Przypomnijmy, iż szukamy takiego β, że $f_\alpha(\beta) = \frac{\pi}{2}$ przy ustalonym α (u nas $\alpha = \frac{2}{3}\pi$). Z tym to i DERIVE ma kłopoty (albo my nie potrafimy go odpowiednio użyć), ale w szkole równania rozwiązuje się odczytując pierwiastek z wykresu; uczyńmy podobnie. Rysujemy na komputerze wykres funkcji $f_\alpha(\beta)$ (przy zadanym $\alpha = \frac{2}{3}\pi$) i odczytujemy przybliżoną wartość $\beta \approx 1,2446$ rad $\approx 71,3°$, przy której $f_\alpha(\beta) = \frac{\pi}{2}$.

Zajmijmy się teraz UTP.
Obliczenie kwadratów pól „przyprostokątnych" jest łatwe:

$$(P_{AA_1A_2})^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\alpha\right)^2 = \frac{\sin^2\alpha}{4},$$

$$(P_{AA_1A_3})^2 = (P_{AA_2A_3})^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot QA_3\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\beta + \sin^2\beta\right).$$

Gorzej z kwadratem pola „przeciwprostokątnej". Wzór Herona? Brrr! Może lepiej tak:

$$\begin{aligned}(P_{A_1A_2A_3})^2 &= \left(\frac{1}{2}A_1A_2\cdot A_3Z\right)^2 = &&\text{[gdzie } Z \text{ oznacza środek odcinka } A_1A_2\text{]}\\ &= \frac{1}{4}(2\sin\frac{\alpha}{2})^2(A_3Z)^2 = &&\text{[tw. kosinusów w } \triangle AA_3Z\text{]}\\ &= \frac{1}{4}(2\sin\frac{\alpha}{2})^2\left(1+(\cos\frac{\alpha}{2})^2 - 2\cdot 1\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta\right) = \\ &= \sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta\right).\end{aligned}$$

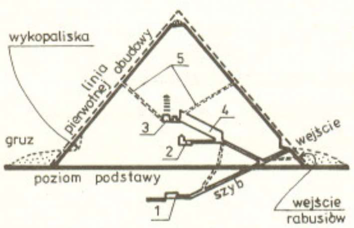
Dalej bez kalkulatora nie obejdzie się; wstawiamy $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ oraz $\beta = 1,2446$ wyliczone poprzednio i dostajemy

$$(*)\qquad \begin{aligned}(P_{AA_1A_2})^2 + (P_{AA_1A_3})^2 + (P_{AA_2A_3})^2 &\approx 0,674669803,\\ (P_{A_1A_2A_3})^2 &\approx 0,6972170699.\end{aligned}$$

Różnica jest bardzo mała (rzędu 3%). Ale jednak jest! Czy to wystarcza, aby obalić UTP? Może ta różnica spowodowana jest tylko błędami zaokrągleń? Poza tym odczytywaliśmy przecież z wykresu! Może zbadajmy jeszcze raz to samo zagadnienie, ale już przy innym α, na przykład $\alpha = \frac{5}{6}\pi$.

Dla takiego α mamy $f_\alpha(\beta) = \frac{\pi}{2}$, gdy $\beta \approx 0,99$ rad $\approx 56,7°$, natomiast wartości we wzorze (*) różnią się już o około 0,178. To chyba sporo! To już nie mogą być błędy zaokrągleń. Zatem UTP nie jest prawdziwe dla wszystkich czworościanów prostokątnych! Jeśli tak, to z powyższego wynika, że twierdzenie Pitagorasa, tylko przez czysty przypadek (i tylko na płaszczyźnie) jest twierdzeniem o kącie prostym. Ogólnie, nie zależy ono wyłącznie od miary kąta, ale... od jego kształtu. Jest to więc twierdzenie nie o kącie prostym, ale o kwadracie (sześcianie), a raczej o ich „narożnikach".

Na koniec zajmijmy się problemem, który Czytelnik zechce, być może, potraktować jako zadanie domowe; mianowicie spróbujmy zbadać, czy jakieś uogólnienia twierdzenia Pitagorasa nie były znane już... przed Pitagorasem. (Egipcjanie, na długo przed Pitagorasem, znali związek między bokami trójkąta prostokątnego, Pitagorasowi przypisuje się tylko (aż?) dowód tej zależności.)



1. Właściwa komora królewska
2. Komora grobowa królowej
3. Główna „komora królewska
4. Wielki korytarz
5. Kanały wentylacyjne

Rys. 19. Piramida Cheopsa

Egipskie piramidy kryją jeszcze wiele niezbadanych tajemnic. Ich proporcje są imponujące: 147 metrów wysokości i 227 metrów długości boku podstawy w przypadku piramidy Cheopsa w Gizie. Czy może kąt bryłowy w wierzchołku tej piramidy jest prosty? Jaką ma miarę? A jakie są kąty bryłowe przy podstawie? Czy kwadrat pola podstawy jest równy sumie kwadratów pól ścian trójkątnych? Jeśli odpowiedź brzmi *nie*, to jakie wymiary musiałaby mieć piramida, by zachodziła równość? A gdyby zbudowano ją na planie sześciokąta foremnego (n-kąta foremnego)?

Hej, Maturzysto! Czy to nie jest ciekawsze niż kolejne zadanie o ostrosłupie prawidłowym o podstawie czworokątnej?