Protokół z posiedzenia Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki obradując dnia 9 września 1993 roku w Rzeszowie w składzie: Jerzy Bednarczuk, Antoni Dawidowicz – przewodniczący, Andrzej Mąkowski, Agnieszka Wojciechowska i Krzysztof Oleszkiewicz, biorąc pod uwagę dobór tematu pracy, poziom pracy i przebieg obrony, postanowiło przyznać:

1. Srebrny medal i nagrodę w wysokości 700 000 zł Ilonie Królak z LO „Carolinum" w Nysie za prace „Symbol Newtona – inaczej" i „Kilka ciekawych dociekań".
2. Brązowy medal i nagrodę w wysokości 500 000 zł Romanowi Wenclowi z Technikum Elektrycznego w Opolu za pracę „Czytając Sierpińskiego".
3. Dyplom uczestnictwa w finale Romanowi Wenclowi za pracę „O różniczkowaniu ciągów prawie wszystko".
4. Nagrody pieniężne w wysokości 400 000 zł każda opiekunom prac: Janowi Sosulskiemu i Stanisławie Polak.

[Złotego medalu nie przyznano].

Tradycyjnym zwyczajem redakcja *Delty* ogłasza Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zachęcamy uczniów zainteresowanych matematyką do opracowywania swoich matematycznych rozważań i nadsyłania rezultatów do redakcji *Delty*. Poniżej przypominamy szczegółowy regulamin konkursu.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

Rozwiązanie zadania M 691. Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa i po k-krotnym wykonaniu opisanej operacji po raz pierwszy otrzymujemy na okręgu jedenaście kul białych. Znaczy to, że w poprzednim kroku mieliśmy same kule czarne. Same kule czarne można zaś otrzymać tylko wtedy, gdy uprzednio, tj. po $(k-2)$ powtórzeniach naszej operacji, każde dwie sąsiednie kule miały różne kolory. Taka sytuacja nie jest możliwa wtedy, gdy liczba wszystkich kul jest nieparzysta (na przykład równa 11). Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 692. Dla każdej liczby naturalnej $n>2$ zachodzi nierówność $(n!)^2>n^n$. Istotnie, mamy

$$(n!)^2=(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)(n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1)=(1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot(3\cdot(n-2))\cdot\ldots\cdot(n\cdot 1).$$

Po prawej stronie jest n czynników; każdy z nich jest większy lub równy n. Ponadto, dla wszystkich czynników poza pierwszym i ostatnim nierówność jest ostra:

$$(l+1)(n-l)=n+l(n-1)>n \quad \text{dla } l=1,2,\ldots,(n-2).$$

Stosując udowodnioną nierówność dla $n=19941994$ otrzymujemy natychmiast odpowiedź: większa z dwóch liczb to $(19941994!)^2$.

Rozwiązanie zadania M 693. Niech p będzie liczbą pierwszą (jak wiadomo, liczb pierwszych jest nieskończenie wiele). Połóżmy $a=\sqrt{p}$. Liczba a jest niewymierna (dowód tego faktu jest taki sam, jak znany szkolny dowód niewymierności $\sqrt{2}$).
Weźmy teraz dowolną liczbę pierwszą $q\neq p$ i niech $b=\log_{\sqrt{p}} q$. Wtedy, wprost z definicji logarytmu,

$$a^b=(\sqrt{p})^{(\log_{\sqrt{p}} q)}=q.$$

Pozostaje tylko udowodnić, że liczba b jest niewymierna. Gdyby było $b=\frac{m}{n}$ dla pewnych naturalnych m i n, to wówczas

$$(\sqrt{p})^{\frac{m}{n}}=q,$$

a stąd $p^m=q^{2n}$ – sprzeczność, bowiem każda ze stron tego równania ma inny rozkład na czynniki pierwsze.

Rozwiązanie zadania F 373. Ze względu na słabą przewodność termiczną powietrza procesy adiabatyczne kształtują rozkład temperatury. Równanie przemiany adiabatycznej zapisane za pomocą ciśnienia p, temperatury T przyjmuje postać

$$p^{1-\kappa}T^{\kappa}=\mathrm{const}.$$

Stąd $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p}=\dfrac{T(\kappa-1)}{p^{\kappa}}$, gdzie κ jest stosunkiem ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości. Zmiana ciśnienia z wysokością wyraża się wzorem $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h}=\rho \mathrm{g}$, gdzie ρ jest gęstością powietrza. Mnożąc oba równania stronami dostajemy

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}h}=\frac{\rho \mathrm{g} T(\kappa-1)}{p^{\kappa}}.$$

Zapisując równanie stanu gazu doskonałego w postaci $p=\dfrac{\rho}{\mu}\mathrm{R}T$ i zakładając, że zmiany są liniowe, po podstawieniu $\kappa=1{,}4$ otrzymujemy ostatecznie

$$\Delta T=\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{\mu \mathrm{g} h}{\mathrm{R}}=9{,}8^{\circ}C.$$