Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 157 (WT=1,90) i 158 (WT=3,93) z numeru 4/1993

Przemysław Gworys	– Częstochowa	34,82
Tomasz Wietecha	– Tarnów	33,90
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	28,96
Andrzej Borowski	– Aleksandrów Kujawski	21,20
Roman Wencel	– Komprachcice	11,60

Skrót regulaminu

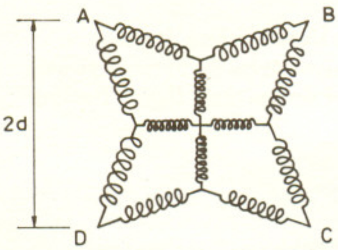
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1993

Zadania z fizyki nr 171, 172

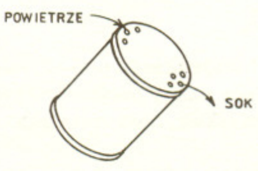
Redaguje Jerzy B. BROJAN

171. Dwanaście sprężynek o stałej sprężystości k i długości swobodnej zero (tzn. przyjmujących długość l pod wpływem siły $F = kl$) połączono jak na rysunku 1 i naciągnięto rozpinając je na czterech punktach A, B, C i D tworzących kwadrat o boku $2d$. Jaką siłę wywierają sprężynki na każdy z tych czterech punktów?



Rys. 1

172. Aby przelać sok z puszki do szklanki, trzeba w wieczku wybić dziurki do wylewania soku i dziurki do wlotu powietrza (rys. 2). Jacek wybija dziurki o jednakowej średnicy (np. około 5 mm) i zastanawia się: Więcej niż 10 dziurek nie chce mi się wybijać, więc ile z nich powinno służyć do wlotu powietrza, a ile do wylewania soku, żeby wylać go najszybciej?



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1993

Przypominamy treść zadań:

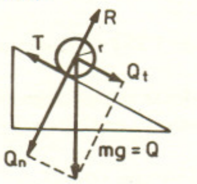
163. Zafrasowany Węchosław Szlabańczyk szukał porady u inspektora Wnikliwego (czasowo oddelegowanego do służby celnej).
– Otrzymaliśmy poufną informację, że na tej ciężarówce w niektórych puszkach zamiast piwa przemycane są narkotyki, ale jak odróżnić te puszki? – zastanawiał się. – Nie możemy przecież otwierać wszystkich po kolei, a tu w Zapadłej Dziurze nie mamy nawet przyzwoitej wagi, nie mówiąc już o rentgenie.
– Czy dźwięk nie może być wskazówką? – inspektor wziął jedną z puszek do ręki i potrząsnął.
– Niestety, nie. Ten narkotyk ma formę pasty wypełniającej puszkę, ale na wierzchu i spodzie dla lepszego maskowania nalewają trochę wody, więc odgłos jest taki, jak zwykłej puszki z piwem.
Dłuższą chwilę trwała cisza.
– Chyba gdzieś znajdziemy jakąś gładką deskę? – zapytał wreszcie inspektor.
Jaki pomysł przyszedł do głowy inspektorowi Wnikliwemu?

164. Plastykowy krążek o średnicy 20 cm i masie 10 g jest równomiernie naładowany ładunkiem 100 nC. Z jaką prędkością kątową musiałby wirować ten krążek w płaszczyźnie poziomej, aby mógł zawisnąć podtrzymywany tylko przez pionowe pole magnetyczne o indukcji 2 T? Ile wynosiłaby wtedy w środku krążka indukcja jego własnego pola magnetycznego?

163. Jeśli z równi pochyłej staczają się dwie puszki, z których jedna jest wypełniona cieczą, a druga substancją stałą, to szybciej stoczy się puszka z cieczą. Przyczyna leży w tym, że ciecz nie obraca się wraz z puszką (albo obraca się z pewnym opóźnieniem), więc prawie cała początkowa energia grawitacyjna przechodzi podczas staczania się w energię kinetyczną ruchu postępowego. Dla puszki z ciałem stałym część energii pochłania ruch obrotowy, zatem ruch postępowy jest wolniejszy.

164. Podzielmy krążek na cienkie pierścienie zawierające się między promieniami r i $r + \mathrm{d}r$. Ładunek takiego pierścienia jest – zgodnie z założeniem o równomiernym rozkładzie – proporcjonalny do jego powierzchni $2\pi r\mathrm{d}r$, czyli równy $\mathrm{d}Q = \frac{2\pi r\mathrm{d}r}{\pi R^2}\cdot Q$, gdzie R – promień krążka, Q – ładunek całkowity. Ruch tego ładunku z prędkością kątową ω jest równoważny przepływowi prądu $\mathrm{d}J = \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\cdot\mathrm{d}Q = \frac{\omega Q}{\pi R^2}r\mathrm{d}r$. Korzystając dalej ze wzoru $\mathrm{d}F = \mathrm{d}J\cdot l\cdot B$ oraz ze wzoru na pole własne w środku pętli $\mathrm{d}B_w = \frac{1}{2}\mu_0\frac{\mathrm{d}J}{r}$ i całkując znajdujemy $F = \frac{2}{3}\omega QBR$, czyli $\omega = \frac{3F}{2QBR} \approx 7{,}5\cdot 10^6$ rad/s (wynik niezbyt realny!), natomiast $B_w = \frac{1}{2}\mu_0\frac{\omega Q}{\pi R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3F}{BR^2} \approx 1{,}5\ \mu\mathrm{T}$.

Rozwiązanie zadania F 374.
Rozpisujemy siły działające na kulkę na równi (rys.).



$$Q_t = mg\sin\alpha$$
$$Q_n = mg\cos\alpha$$

Niech T oznacza siłę tarcia, $I = \frac{2}{5}mr^2$ jest momentem bezwładności kulki. Moment siły działający na kulkę jest równy $M = T\cdot r$, a przyspieszenie kątowe $\varepsilon = a/r$, gdzie a jest przyspieszeniem kulki. Równania ruchu przyjmują postać

$$mg\sin\alpha - T = ma\,,$$
$$Tr = I\varepsilon\,.$$

Rozwiązując powyższe równania otrzymujemy

$$T = \frac{2}{7}mg\sin\alpha\,.$$

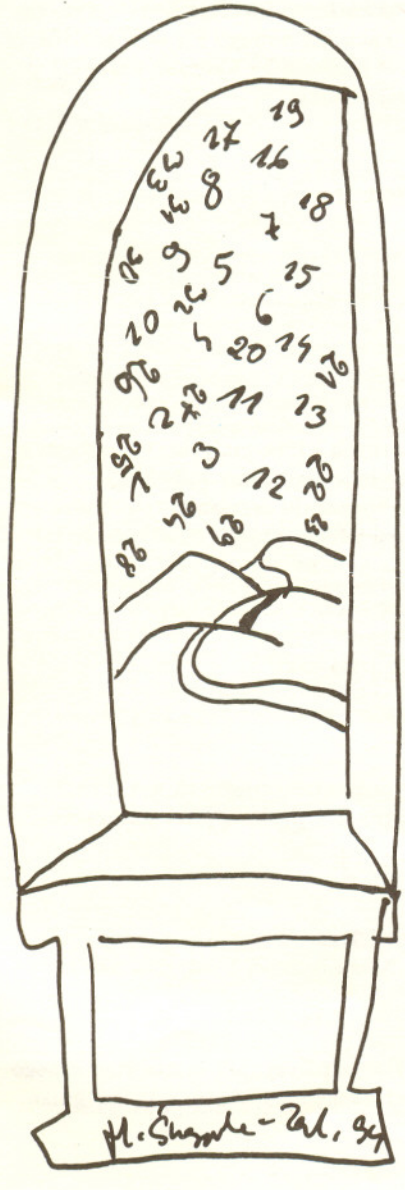
Porównując z maksymalną siłą tarcia $T_{max} = \mu_s mg\cos\alpha$, otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{2} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 74^\circ\,.$$

$\sqrt[\otimes]{\sum !} = 44$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 259 (WT=2,14) i 260 (WT=3,07)
z numeru 4/1993

Lesław Skrzypek	– Rzeszów	43,95
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	43,33
Piotr Kumor	– Olsztyn	42,12
Janusz Olszewski	– Suwałki	40,24
Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	35,39



Zadania z matematyki nr 273, 274

Redaguje Marcin E. KUCZMA

273. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Tworzymy dwa nowe ciągi o wyrazach $y_n = (x_{n-1} + x_{n+1})/2$ oraz $z_n = (x_{n-2} + x_n + x_{n+2})/3$. Udowodnić, że jeżeli $x_n \le y_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, to $y_n \le z_n$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$

274. Liczby naturalne $a \ge 1$ i $b \ge 1$ są względnie pierwsze; $k \ge 1$ jest dowolną liczbą naturalną. Dowieść, że każdy dzielnik nieparzysty liczby $a^{2^k} + b^{2^k}$ ma postać $2^{k+1}t + 1$, gdzie t jest liczbą całkowitą.

Zadanie **274** zaproponował pan Janusz Olszewski z Suwałk.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1993

Przypominamy treść zadań:

265. Dwusieczna kąta C trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie N. Okrąg wpisany ma promień r i jest styczny do boku AB w punkcie T. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że $|AT| \cdot |BT| = r(r + 2|MN|)$.

266. Rozważamy wielomian

$$P(t) = \prod_{k=0}^{n-1} (t+k).$$

Przypuśćmy, że liczby dodatnie x, y, u, v spełniają związki: $P(x) = u^n$, $P(y) = v^n$, $x \ge y$. Dowieść, że $x - y \le u - v$.

265. Punkt N jest środkiem łuku AB, zatem trójkąt AMN jest prostokątny. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Oznaczając miary kątów A, B, C tego trójkąta przez α, β, γ mamy równości

$$2 \cdot |\angle ANM| = |\angle ANB| = 180^\circ - |\angle ACB| = 180^\circ - \gamma,$$
$$|\angle MAN| = 90^\circ - |\angle ANM| = 90^\circ - (180^\circ - \gamma)/2 = \gamma/2,$$
$$|AT| = |IT| \operatorname{ctg} |\angle IAT| = r \operatorname{ctg}(\alpha/2), \qquad |BT| = |IT| \operatorname{ctg} |\angle IBT| = r \operatorname{ctg}(\beta/2),$$
$$2|MN| = 2|AM| \operatorname{tg} |\angle MAN| = |AB| \operatorname{tg}(\gamma/2) = \big(|AT| + |BT|\big) \operatorname{tg}(\gamma/2) =$$
$$= r\big(\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2)\big) \operatorname{tg}(\gamma/2),$$

i ostatecznie

$$\frac{r(r + 2|MN|)}{|AT| \cdot |BT|} = \frac{r^2 + r^2(\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2)) \operatorname{tg}(\gamma/2)}{r \operatorname{ctg}(\alpha/2) \cdot r \operatorname{ctg}(\beta/2)} =$$
$$= \frac{\operatorname{ctg}(\gamma/2) + \operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2)}{\operatorname{ctg}(\alpha/2) \operatorname{ctg}(\beta/2) \operatorname{ctg}(\gamma/2)} = 1.$$

266. Gdy $x = y$, nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy więc, że $x > y > 0$. Weźmy pod uwagę funkcję $f(t) = \big(P(t)\big)^{1/n}$. Ponieważ $u = f(x)$, $v = f(y)$, zatem zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a (o wartości średniej)

$$\frac{u - v}{x - y} = f'(\xi) \qquad \text{dla pewnego} \quad \xi \in (y\,;x).$$

Dla $t > 0$ możemy napisać $P(t) = \mathrm{e}^{g(t)}$, gdzie

$$g(t) = \ln P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(t+k).$$

Obliczamy pochodne rozważanych funkcji:

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t+k}, \qquad P'(t) = \mathrm{e}^{g(t)} \cdot g'(t) = P(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t+k},$$
$$f'(t) = \frac{1}{n}\big(P(t)\big)^{(1/n)-1} P'(t) = \frac{1}{n}\big(P(t)\big)^{1/n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t+k}.$$

Stąd

$$\frac{u - v}{x - y} = \frac{1}{n}\big(P(\xi)\big)^{1/n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\xi + k} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\xi + k}\right)^{-1/n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\xi + k}\right) \ge 1,$$

na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb $1/(\xi + k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.