Wielkie Twierdzenie Fermata

Władysław NARKIEWICZ

Niewiele problemów matematycznych osiągnęło taką sławę jak pytanie o to, czy dla $n > 2$ istnieje n-ta potęga liczby naturalnej, dająca się przedstawić w postaci sumy dwóch potęg o tym samym wykładniku, tj. czy istnieją liczby naturalne x, y, z, spełniające równanie

(1) $$x^n + y^n = z^n.$$

W przypadku $n = 2$ odpowiedź na to pytanie jest prosta, mamy bowiem $5^2 = 3^2 + 4^2$ i nietrudno stwierdzić, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań. Już w starożytności matematyk aleksandryjski, Diofantes, potrafił opisać wszystkie rozwiązania równania

(2) $$x^2 + y^2 = z^2.$$

Dzieła jego zostały opublikowane we Francji w połowie XVII wieku i jeden z egzemplarzy tego wydania trafił w ręce wybitnego francuskiego matematyka, Pierre'a Fermata, który około roku 1637 na marginesie (a były one wówczas dość spore) napisał:

Nie można rozbić sześcianu na dwa sześciany, ani bikwadratu na dwa bikwadraty, ani żadnej potęgi wyższej od 2 na dwie potęgi o tym samym wykładniku. Znalazłem naprawdę zadziwiający dowód tego twierdzenia, lecz ten margines jest zbyt wąski, by go zmieścić.

To stwierdzenie, które we współczesnej terminologii można wysłowić następująco:
dla $n > 2$ równanie (1) nie ma naturalnych rozwiązań,
nosi od dawna nazwę **Wielkiego Twierdzenia Fermata (WTF)**.

Zauważmy, że wystarczy twierdzenie to udowodnić dla wszystkich nieparzystych wykładników pierwszych oraz dla wykładnika 4, gdyż z prawdziwości WTF dla pewnego wykładnika n wynika jego słuszność dla wszystkich wielokrotności n, a każda liczba naturalna większa od 2 ma dzielnik pierwszy nieparzysty lub też jest potęgą dwójki, a więc dzieli się przez cztery.

Dowód WTF w przypadku $n = 4$ podał sam Fermat, opierając się na wyniku Diofantesa o rozwiązaniach równania (2). Przez wiele lat matematycy szukali dowodu WTF dla innych wykładników. W roku 1770 Leonard Euler znalazł dowód w przypadku $n = 3$, a w 1828 r. P.G.L. Dirichlet rozstrzygnął przypadek $n = 5$. Ważnym krokiem naprzód stała się stworzona przez E.E. Kummera teoria liczb idealnych, która później doprowadziła do wytworzenia się wielu podstawowych pojęć nowoczesnej algebry. Za pomocą tej teorii Kummer potrafił udowodnić WTF dla wszystkich liczb $n > 2$, mających dzielnik pierwszy mniejszy od 100. (Jego dowód nie był w pełni dokładny, ale pozostawioną lukę wypełnił D. Hilbert w 1897 roku.)

Wyraźny wzrost zainteresowania problemem Fermata zaznaczył się po roku 1909, kiedy to Getyngeńska Akademia Nauk ogłosiła, iż niejaki Paul Wolfskehl zapisał w testamencie sto tysięcy marek (co było wówczas ogromną fortuną) osobie, która udowodni twierdzenie sformułowane przez Fermata. Swoje „dowody" zgłaszało setki amatorów, często niewiele z matematyki rozumiejących i nie zdających sobie sprawy z trudności zagadnienia. Trwa to aż po dzień dzisiejszy, aczkolwiek liczba nadsyłanych prób dowodu znacznie zmalała, gdy okazało się, że wartość nagrody spadła i aktualnie wynosi kilka tysięcy marek. (Zauważmy tu, że do dzisiaj jedynie w niewielu przypadkach znany jest elementarny dowód WTF i specjaliści są przekonani, że nie jest możliwe istnienie prostego i elementarnego dowodu, tak więc próby jego znalezienia są jedynie stratą czasu.)

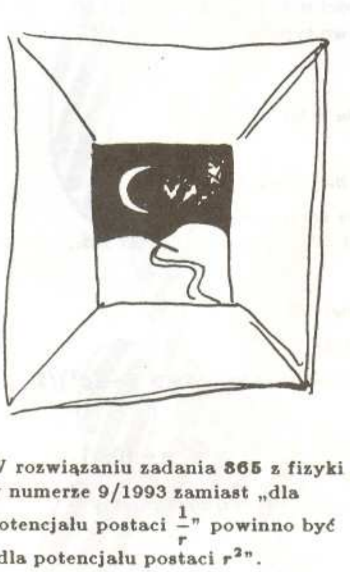
Rozwiązanie zadania M 688.
Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa. Weźmy najmniejszą liczbę naturalną k, dla której istnieją całkowite, niezerowe m i n spełniające równość $m^2 + n^2 = 3^k$. Kwadrat liczby całkowitej daje z dzielenia przez 3 resztę zero lub jeden, zatem obie liczby m i n są podzielne przez 3, co oznacza, że $(3j)^2 + (3l)^2 = 3^k$, a więc $j^2 + l^2 = 3^{k-2}$, a to już jest sprzeczność (łatwo zauważyć, że $k-2$ też jest liczbą naturalną!).

Rozwiązanie zadania M 689.
Rozważmy funkcję f daną wzorem
$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-x}\right).$$
Lewa strona nierówności, której dowodzimy, jest równa $f(p)$, a prawa $f(p+1)$. Łatwo zauważyć, że f jest wypukła (bo jest sumą funkcji wypukłych $a_j^p \cdot (a_i/a_j)^x$) i ma własność
$$f((p/2)+x) = f((p/2)-x).$$
Oznacza to, że wykres f ma pionową oś symetrii, skąd wobec wypukłości funkcji f ma ona minimum dla $x = p/2$ i rośnie dla $x > p/2$. Zatem $f(p) < f(p+1)$, co należało udowodnić.

Rozwiązanie zadania M 690.
Teza zadania staje się niemal oczywista, jeśli zapiszemy nierówność podaną w założeniu w postaci $a_{k+1} - a_k \geq a_k - a_{k-1}$. Znaczy to, że kolejne odcinki łamanej L o wierzchołkach (k, a_k) mają coraz większe współczynniki kierunkowe, czyli L jest wykresem funkcji wypukłej, określonej na przedziale $[1, n]$ i znikającej na jego końcach. Stąd wynika, że wszystkie punkty wykresu leżą poniżej osi odciętych.
A oto inne rozwiązanie. Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywą i weźmy taką liczbę j, że $a_{j-1} \leq 0 < a_j$. Mamy wówczas
$$a_n - a_{n-1} \geq a_{n-1} - a_{n-2} \geq \ldots \geq$$
$$\geq a_{j+1} - a_j \geq a_j - a_{j-1} > 0.$$
Ponieważ $a_k - a_{k-1} > 0$ dla $k = j, j+1, \ldots, n$, więc otrzymujemy
$$0 = a_n > a_{n-1} > \ldots > a_j > 0.$$
Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Rozwiązanie zadania F 871.
Energia kinetyczna meteorytu jest równoważna sile wybuchu
$$\frac{mv^2}{2} = E\,.$$
Podstawiając $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, oraz przeliczając energię na jednostki układu SI, otrzymujemy
$$r = \sqrt[3]{\frac{3E}{2\pi\rho v^2}} = 25\ \mathrm{m}\,.$$
Warto zauważyć, że masa meteorytu wynosi 0,15 megatony i jest wielokrotnie mniejsza od masy trotylu powodującego równoważny wybuch.

Rozwiązanie zadania F 872.
Potraktujmy siłę oporu powietrza jako małe zaburzenie. Prędkość w ruchu niezaburzonym jest równa:
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{v_0^2}{2} + \left(v_0\frac{\sqrt{2}}{2} - gt\right)^2.$$
Czas ruchu zaś wynosi
$$T = \frac{v_0\sqrt{2}}{g}.$$
Stąd siła oporu powietrza jest równa
$$F = kv^2 = kv_0^2\left(1 - \frac{2t}{T} + \frac{2t^2}{T^2}\right).$$
Zmiana pędu pocisku równa jest popędowi siły
$$\Delta p = \int_0^T F\,\mathrm{d}t,$$
$$m\Delta v = \frac{2}{3}kv_0^2 T\,.$$
Podstawiając wyrażenie na T oraz uwzględniając, że $kv_0^2 = \varepsilon g$ otrzymujemy
$$\Delta v = \frac{2\sqrt{2}}{3}\varepsilon v_0 \approx 0,047 \cdot v_0\,.$$



W rozwiązaniu zadania 865 z fizyki w numerze 9/1993 zamiast „dla potencjału postaci $\frac{1}{r}$" powinno być „dla potencjału postaci r^2".

Używając metody Kummera wspomaganej techniką komputerową potrafiono powiększyć zbiór wykładników, dla których WTF jest prawdziwe. I tak w 1987 roku J.W. Tanner i S.S. Wagstaff wykazali jego słuszność dla wszystkich wykładników pierwszych $p < 150\,000$, a w tzw. pierwszym przypadku nawet dla $p < 156\,442\,236\,847\,241\,650$. („Pierwszy przypadek" WTF zachodzi wtedy, gdy dodatkowo się żąda, by żadna z liczb x, y, z w równaniu (1) nie była podzielna przez wykładnik, o którym zakładamy, że jest liczbą pierwszą.)

Ostatnie lata przyniosły istotny postęp. Najpierw G. Faltings udowodnił w 1983 roku bardzo ogólne twierdzenie o równaniach z rozwiązaniami całkowitymi, z którego wynika m.in., że dla ustalonego $n > 2$ równanie (1) może mieć jedynie skończenie wiele rozwiązań spełniających warunek $\mathrm{NWD}(x, y, z) = 1$. Następny ważny rezultat został uzyskany przez L.M. Adlemana i D.R. Heath-Browna w 1985 roku, którzy wykorzystali pewien rezultat E. Fouvry'ego z teorii rozmieszczenia liczb pierwszych do wykazania, że WTF jest słuszne w pierwszym przypadku dla nieskończenie wielu wykładników pierwszych.

Wreszcie w czerwcu 1993 roku Andrew Wiles zaprezentował na konferencji w Cambridge dowód WTF, słuszny dla wszystkich wykładników większych od 2. Dowód ten nie jest jeszcze opublikowany (będzie prawdopodobnie zawierał ponad 200 stron) i jest bardzo trudny, opiera się bowiem na najnowszych osiągnięciach algebry, analizy i geometrii. Obecnie jest on sprawdzany przez czołowych specjalistów, ale panuje przekonanie, że doczekaliśmy się wreszcie rozwiązania jednego z najsławniejszych problemów matematyki.

Patrz w niebo

Kiedy ostatnio wybuchła supernowa w naszej Galaktyce? Wbrew pozorom nie jest łatwo odpowiedzieć na tak proste pytanie, ponieważ większa część Galaktyki jest ukryta przed naszymi oczami za warstwami materii międzygwiazdowej. Ostatnią jasną i widoczną gołym okiem była supernowa Keplera z 1604 roku, ale niekoniecznie musiała to być w ogóle ostatnia. Promieniowanie optyczne nie jest tym, które najłatwiej przenika materię międzygwiazdową i np. radioźródło Cassiopeia A jest uważane za pozostałość po młodszej supernowej. Jej eksplozja nastąpiła prawdopodobnie w połowie XVII wieku i była zupełnie nie zauważona przez ówczesnych obserwatorów. John J. Cowan z University of Oklahoma (USA) twierdzi, że jego zespół znalazł pozostałość po supernowej, która wybuchła najwyżej 100 lat temu.

Podejrzanym o to obiektem jest radioźródło w Tarczy oznaczone katalogowym symbolem $25.5 + 0.2$. Został on odkryty w trakcie przeglądu pasa Drogi Mlecznej prowadzonego za pomocą zespołu radioteleskopów wchodzących w skład *Very Large Array*. Obiekt ten w zakresie radiowym wygląda jak tarczka o rozmiarach 15×20 sekund łuku, co przy odległości ocenianej na co najmniej 7000 pc odpowiadałoby liniowym rozmiarom około pół parseka. Tarczka nie wykazuje żadnej struktury, podejrzewa się jednak obecność pulsara w centrum (jak w mgławicy Krab).

O obiekcie tym na razie informacje są bardzo skąpe. Nie wiadomo nawet na przykład, czy jego jasność spada czy rośnie. Nie ma w tym nic dziwnego, ponieważ leży on blisko płaszczyzny Galaktyki, w dodatku w obszarze bardzo gęsto wypełnionym gwiazdami, gwiazdozbiór Tarczy leży wszak niedaleko kierunku ku centrum Galaktyki. W ogóle obserwacje supernowych są z natury rzeczy skazane na los szczęścia, w naszej Galaktyce są szczególnie trudne, tak że nawet częstość pojawiania się supernowych jest bardzo źle określona. A informacja ta miałaby ogromne znaczenie dla teorii ewolucji gwiazd.

Tomasz KWAST