syberyjskiej na dużym obszarze, a nie wybicie krateru. Jednym z najbardziej znanych i spektakularnych przykładów tworu powierzchniowego powstałego w wyniku uderzenia w Ziemię obiektu kosmicznego jest natomiast słynny krater meteorytowy w Arizonie (USA) o średnicy 1,2 km i głębokości 200 m. Rezultaty najnowszych badań wskazują, że powstał on około 50 tys. lat temu w wyniku spadku z prędkością 11 km/s małej planetoidy żelaznej o rozmiarach ocenianych na około 60 m i masie szacowanej na kilka milionów ton. Dotychczas na powierzchni Ziemi zidentyfikowano około 140 tego typu kraterów o średnicach do 200 km.

Przypuszcza się, że średnio w ciągu roku kilka obiektów o rozmiarach rzędu 100 m przelatuje – obrazowo mówiąc – między Ziemią a Księżycem, czyli w odległości od nas mniejszej niż 400 tys. km. Podczas tak dużego zbliżenia do Ziemi można je dostrzec, chociaż zaobserwowanie szybko poruszającego się po niebie i słabo świecącego ciała niebieskiego jest, oczywiście, bardzo trudne. Dotychczas tylko raz to się udało astronomom: 18 stycznia 1991 roku odkryta została planetoida 1991 BA, której minimalna odległość od Ziemi wyniosła zaledwie 0,0011 jednostki astronomicznej, czyli około 170 tys. km; jej średnicę oceniono na około 10 m.

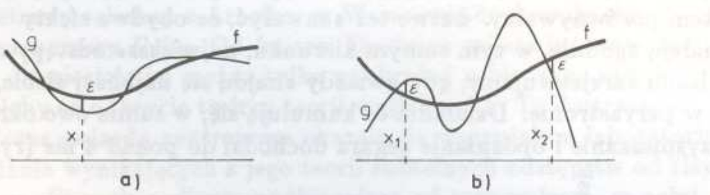
Uderzenie w Ziemię jeszcze większego obiektu, o rozmiarach rzędu 1 km, następuje – jak się dziś sądzi – raz na 500 tys. lat. Ale skutki takiego wydarzenia mogą już mieć charakter globalny. Hipoteza Luisa W. Alvareza dotycząca wyginięcia dinozaurów usiłuje wyjaśnić to tajemnicze wydarzenie sprzed 65 milionów lat zderzeniem naszej planety z planetoidą lub kometą o średnicy około 10 km. Nie wnikając tu w szczegóły tego interesującego zagadnienia wspomnijmy tylko, że ostatnio odkryto prawdopodobnie pozostałość tej katastrofy. Wydaje się nią być krater Chicxulub, którego południowa część znajduje się w północno-zachodnim Jukatanie, a północna jest pogrążona w wodach Zatoki Meksykańskiej. Krater ma średnicę około 200 km, a jego głębokość dochodzi do 9 km.

Ocenia się, że około 90% zagrażających Ziemi obiektów to tzw. planetoidy bliskie Ziemi i komety krótkookresowe (o okresach obiegu wokół Słońca krótszych niż 20 lat). Średnio co kilkadziesiąt lat następuje przelot takiej planetoidy koło Ziemi

Przeglądając prace Sierpińskiego

Jerzy MIODUSZEWSKI

Funkcje aproksymują się *jednostajnie* z dokładnością do ε, jeśli ich wykresy odchylają się od siebie w każdym miejscu mniej niż o ε (rys. 1a).



Rys. 1. Aproksymacja jednostajna z dokładnością do ε (a) i punktowa z dokładnością do $(\varepsilon; x_1, x_2)$ (b).

Ale można aproksymować słabiej, nie wymagając, by funkcje f i g przylegały do siebie z dokładnością do ε wzdłuż całego wykresu, lecz jedynie w skończenie wielu punktach. Mianowicie, mówimy, że funkcje f i g aproksymują się z dokładnością do $(\varepsilon; x_1, \ldots, x_k)$, jeżeli

$$|f(x_1) - g(x_1)| < \varepsilon, \quad \ldots, \quad |f(x_k) - g(x_k)| < \varepsilon.$$

O ile przy aproksymacji jednostajnej funkcja aproksymowana z dowolną dokładnością ε funkcjami ciągłymi jest sama ciągła (znane twierdzenie z analizy), to przy tej słabszej aproksymacji, którą nazwiemy *punktową*, związek funkcji aproksymowanej z aproksymującymi ją jest luźniejszy.

Mimo to pewne własności – nazwijmy je umownie *arytmetycznymi* – przenoszą się. Odnotujmy na początek dwie tego rodzaju własności.

(I) Jeśli liczba jest okresem funkcji aproksymujących, jest także okresem funkcji aproksymowanej punktowo.

(II) Jeśli funkcje aproksymujące punktowo spełniają związek

$$g(1-x) = 1 - g(x) \quad \text{dla dowolnego } x, \tag{1}$$

to funkcja aproksymowana też go spełnia.

Wspólny chwyt dowodowy – także i dla kilku późniejszych stwierdzeń – zilustrujemy dowodząc (I).

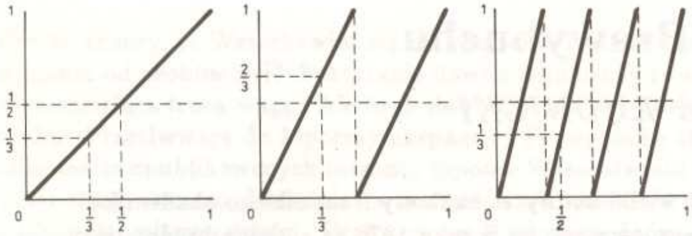
Oto, skoro funkcja f jest aproksymowana z dowolną dokładnością przewidzianą dla aproksymacji punktowej funkcjami o okresie r, więc jest aproksymowana nimi – dla każdego x i każdego ε – z dokładnością $(\varepsilon; x, x+r)$, co znaczy istnienie takiej funkcji g o okresie r, że $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ i $|f(x+r) - g(x+r)| < \varepsilon$, co zważywszy na okresowość, $g(x+r) = g(x)$, daje $|f(x+r) - f(x)| < 2\varepsilon$, a w rezultacie $f(x+r) = f(x)$ wobec dowolności ε.

Każda liczba dwójkowo wymierna, $r = k/2^s$, k całkowite, s naturalne, jest okresem każdej spośród funkcji

$$f_n(x) = \{2^n x\}, \tag{2}$$

($\{a\}$ jest częścią ułamkową liczby a) jeśli tylko wskaźnik (liczba naturalna) n jest $\geq s$.

Wobec (I), liczby dwójkowo wymierne są okresami każdej funkcji nie będącej typu (2) aproksymowanej punktowo funkcjami (2). Okresy mogą być więc dowolnie małe. Wśród funkcji ciągłych jedynie funkcje stałe mają tę własność (zadanie z analizy na ciągłość).



Rys. 2. Funkcje $f_n(x) = \{2^n x\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \leq x < 1$.

Funkcje (2), jeśli zaniedbać ich zachowanie w punktach dwójkowo wymiernych, mają własność (1): ich wykresy są symetryczne względem $(1/2, 1/2)$. Ta własność, wobec (II), przenosi się na funkcje aproksymowane przez nie punktowo. Wartością funkcji stałej może być zatem jedynie $1/2$.

Funkcja $f(x) = 1/2$ nie jest jednak aproksymowana punktowo funkcjami (2). Jest tak m.in. dlatego, że w punkcie $1/3$ funkcje f_n przyjmują wartość $1/3$ lub $2/3$ zależnie od parzystości n, a stąd funkcja f aproksymowana przez nie przyjmuje w $1/3$ jedną z tych wartości (punktu $2/3$ dotyczy ta sama alternatywa). Podobne odchylenia od wartości $1/2$ pojawiają się w punktach reprezentujących ułamki o mianownikach $5, 7, \ldots$, a więc na zbiorze gęstym. Nie jest to jednak odchylenie znaczące, o czym świadczy spostrzeżenie, że zbiory punktów x, dla których $f(x) < 1/2$, oraz tych, dla których $f(x) > 1/2$, pozostaną rozłączne, jeśli się je przesunie względem siebie o liczbę dwójkowo wymierną, co jest prostą konsekwencją (I).

Ale i zbyt duża koncentracja funkcji f na wartości $1/2$ nie jest możliwa. Nie wyjaśniając, czym jest miara (w sensie Lebesgue'a), odnotujmy tylko, że funkcje f nie mogą przyjmować wartości $1/2$ na zbiorze miary dodatniej, i że w dowodzie tej własności wykorzystuje się spostrzeżenie, iż funkcje f_n mają własność *addytywności*, $\{g(x+y)\} = \{g(x) + g(y)\}$ (addytywnymi w tym sensie są wszystkie funkcje postaci $\{mx\}$, m całkowite), która przenosi się – jako jedna ze wspomnianych własności arytmetycznych – na funkcje aproksymowane punktowo.

Niech $A = \{x : f(x) = 1/2\}$. Jeśli, przeciwnie, miara A jest dodatnia, to istnieje takie $d > 0$, że jeśli $|t| < d$, to $A \cap (A + t) \neq \emptyset$ (twierdzenie Steinhausa). Weźmy, wśród wymienionych t takie, że $f_n(t)$ jest różna od 0 i $1/2$ dla każdego n (jest tak dla wszystkich t będących ułamkami nieskracalnymi postaci l/m, gdzie m nieparzyste; wtedy bowiem $f_n(l/m)$ jest ułamkiem właściwym o mianowniku m).

Niech $a \in A \cap (A + t)$. Mamy $a = b + t$, gdzie $b \in A$. Z addytywności dostajemy

$$\frac{1}{2} = f(a) = f(b+t) = f(b) + f(t) = \frac{1}{2} + \frac{k}{m},$$

$k = 1, \ldots,$ lub $m - 1$; mamy $0 = \frac{k}{m}$; sprzeczność.

Urywamy tu rozważania matematyczne, które mogły pozostawić wrażenie, że funkcji aproksymowanych punktowo funkcjami (2), poza nimi samymi, w ogóle nie ma. W istocie, pokazaliśmy – markując dowody – że nie ma ich co szukać wśród funkcji w dostatecznym stopniu porządnych. Jakieś inne zapewne nam się „wymknęły".

Na funkcje aproksymowane punktowo funkcjami $\{2^n x\}$ zwrócił uwagę w dwu pracach (1938, 1945) Wacław Sierpiński. Istnienie takich funkcji różnych od $\{2^n x\}$ uzasadnił za pomocą pewnika wyboru.

Z punktu widzenia topologii, zbiór *funkcji Sierpińskiego* usytuowany w przestrzeni funkcji, w której obowiązuje aproksymacja punktowa – topologia Tichonowa – jest tym samym co przestrzeń Čecha-Stone'a, kompaktyfikacja βN zbioru $\mathbf{N}$ liczb naturalnych. Ujęcie Sierpińskiego jest jedną z realizacji tej ważnej przestrzeni.

w odległości mniejszej niż odległość Księżyca od Ziemi. Pozostałe 10% przypada na komety długookresowe i tzw. komety jednopojawieniowe (o orbitach quasiparabolicznych), które stwarzają znacznie większe niebezpieczeństwo, ponieważ niosą znacznie większą energię niż planetoidy o porównywalnych masach (przelatują w pobliżu Ziemi z większymi prędkościami). Średnio jedna taka kometa na stulecie może znaleźć się między Ziemią a Księżycem.

Ostatnio wiele emocji (wyrażających się, między innymi, w bałamutnych często doniesieniach prasowych) wywołało zbliżenie do Ziemi planetoidy (4179) Toutatis oraz powrót w pobliże Słońca – po 130 latach – komety Swifta-Tuttle'a. Czy te dwa interesujące ciała niebieskie rzeczywiście zagrażają Ziemi?

Planetoida Toutatis, pierwotnie oznaczana 1989 AC, została odkryta 4 stycznia 1989 roku przez francuskiego astronoma C. Pollasa. Nazwana została imieniem bożka galijskiego strzegącego mieszkańców okupowanej przez Rzymian starożytnej Galii przed niebezpieczeństwami niebios. Jest typowym członkiem tzw. grupy Apollo, czyli tych właśnie planetoid, które mogą zbliżać się do Ziemi. Tym, co ją wyróżnia spośród ponad 150 znanych dotychczas obiektów tego rodzaju, jest najmniejsze nachylenie płaszczyzny jej orbity do płaszczyzny ekliptyki wynoszące zaledwie $0,47^\circ$. Okrąża więc ona Słońce niemal w tej samej płaszczyźnie co Ziemia. Od momentu odkrycia obserwowano już tę planetoidę w trzech opozycjach, a także znaleziono kilka przedodkryciowych obserwacji z lipca 1988 roku oraz zidentyfikowano ją z planetoidą 1934 CT, tylko raz dotychczas obserwowaną w 1934 roku. Ten stosunkowo bogaty materiał obserwacyjny umożliwił dobre wyznaczenie jej orbity i zbadanie ewolucji jej ruchu.

Orbita Toutatisa ma mimośród równy 0,64 i wielką półoś wynoszącą 2,5 j.a. Przez peryhelium, oddalone od Słońca o 0,9 j.a., przeszła 13 listopada 1992 roku. Wkrótce potem, 8 grudnia 1992 roku, przeleciała koło Ziemi mijając ją w odległości 3,6 mln km (0,024 j.a.) z prędkością 11,2 km/s. Okres jej obiegu wokół Słońca wynosi prawie dokładnie 4 lata. Podobnych zbliżeń do Ziemi można więc oczekiwać co każde 4 lata w przyszłości. I rzeczywiście, precyzyjne obliczenia wykonane w Centrum Badań Kosmicznych