Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 1994

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 257 (WT=2,66) i 258 (WT=1,65) z numeru 3/1993

Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	41,46
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	41,19
Janusz Olszewski	– Suwałki	40,24
Lesław Skrzypek	– Rzeszów	39,05

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Zadania z matematyki nr 271, 272

Redaguje Marcin E. KUCZMA

271. Do każdej ściany ośmiościanu foremnego o objętości V doklejamy czworościan foremny (ściana ośmiościanu jest ścianą czworościanu). Powstała bryła B nie jest wypukła. Obliczyć objętość najmniejszego wielościanu wypukłego zawierającego B. (Zabawki na choinkę...)

272. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{ab(A+B)}{ab(A+B)+ABC}+\frac{bc(B+C)}{bc(B+C)+ABC}+\frac{ca(C+A)}{ca(C+A)+ABC}\le 1,$$

gdzie $A=b+c,\ B=c+a,\ C=a+b$.

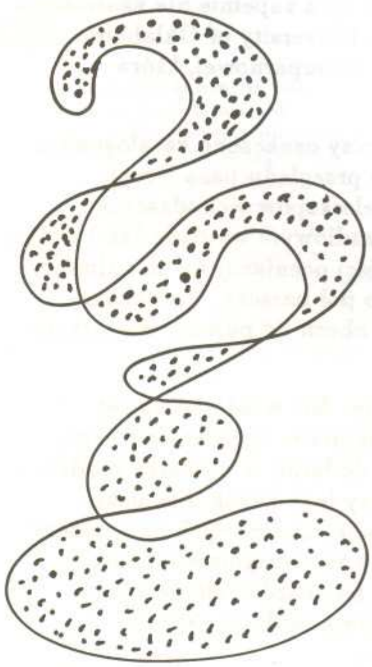
Zadanie **272** zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1993

Przypominamy treść zadań:

263. W każdym okienku tabeli prostokątnej o wymiarach 10×2 umieszczamy tak kółko lub krzyżyk, by żadne dwa krzyżyki nie znalazły się w okienkach sąsiednich. Ile jest takich rozmieszczeń?

264. Udowodnić, że dla $x\in(0;\pi/4)$ zachodzi nierówność $\sin(\operatorname{tg} x) > x$.



263. Każde dopuszczalne rozmieszczenie krzyżyków i kółek można utożsamiać ze słowem utworzonym z 10 znaków A, B lub C: na k-tej pozycji piszemy symbol A, jeśli w k-tej parze okienek tabeli figuruje układ kółko–krzyżyk; symbol B, gdy krzyżyk–kółko; symbol C, gdy dwa kółka. Nie mogą wystąpić pod rząd dwa znaki A ani dwa znaki B.

Rozważmy analogicznie tworzone słowa długości n. Słowo kończące się symbolem A lub B nazwijmy słowem typu I; słowo zakończone symbolem C — słowem typu II. Liczby słów (długości n) typu I oraz II oznaczmy odpowiednio przez u_n oraz v_n.

Ze słowa typu I, długości n, można otrzymać (przez dopisanie kolejnego znaku) dokładnie jedno słowo typu I oraz dokładnie jedno słowo typu II, długości $n+1$. Ze słowa typu II, długości n, można otrzymać dwa słowa typu I oraz jedno słowo typu II, długości $n+1$.

Wynikają stąd wzory rekurencyjne

$$u_{n+1}=u_n+2v_n\,,\qquad v_{n+1}=u_n+v_n\,.$$

Wobec tego

$$v_{n+2}=u_{n+1}+v_{n+1}=(u_n+2v_n)+(u_n+v_n)=v_n+2v_{n+1}\,.$$

Szukana łączna liczba dopuszczalnych słów długości 10 równa się $u_{10}+v_{10}$, czyli v_{11}. Dla $n=1$ i $n=2$ mamy $v_1=1$, $v_2=3$. A zatem $v_3=1+6=7$, $v_4=3+14=17$ itd., $v_{11}=8119$.

264. Wprowadźmy zmienną $y=\operatorname{tg}x$. Należy wykazać nierówność

$$\sin y > \operatorname{arctg} y \qquad \text{dla}\quad y\in(0;1\rangle\,.$$

Przyjmując $f(y)=\sin y-\operatorname{arctg}y$ oraz korzystając ze znanej nierówności $\cos y > 1-(y^2)/2$ mamy

$$f'(y)=\cos y-\frac{1}{1+y^2}>1-\frac{y^2}{2}-\frac{1}{1+y^2}=\frac{y^2(1-y^2)}{2(1+y^2)}>0 \qquad \text{dla}\quad y\in(0;1)\,.$$

Funkcja f jest więc rosnąca w przedziale $\langle 0;1\rangle$. Wobec równości $f(0)=0$ uzyskujemy dowodzoną nierówność $f(y)>0$ dla $y\in(0;1\rangle$.

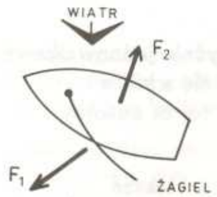
Zadania z fizyki nr 169, 170

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 155 (WT=1,00) i 156 (WT=3,16)
z numeru 3/1993

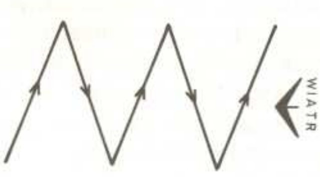
Tomasz Wietecha	– Tarnów	33,90
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	28,77

169. Jak wiadomo, żaglówka może płynąć pod wiatr, tzn. w kierunku tworzącym z kierunkiem wiatru kąt większy od 90° (do około 150°). Taką możliwość żaglówka zawdzięcza kilowi lub mieczowi, który bardzo ogranicza przesunięcia prostopadłe do osi jachtu, pozostawiając jedynie swobodę przesunięcia wzdłuż tej osi. Na rysunku 1 przedstawione zostały siły działające na żaglówkę przy kursie pod wiatr: $\vec{F}_1$ jest siłą działania powietrza na żagiel, a $\vec{F}_2$ – siłą reakcji wody na kil (lub miecz). Wypadkowa tych dwóch sił jest skierowana do przodu, powodując opisany ruch. Dzięki halsowaniu, czyli okresowym zmianom kursu (rys. 2), żaglówka może przemieszczać się średnio wprost pod wiatr – pod kątem 180°.



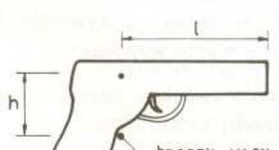
Rys. 1

A oto zadanie. Dwaj zawodnicy rozgrywali regaty na identycznych jachtach płynąc w dół rzeki. Ponieważ nie było wtedy żadnego wiatru, więc zawodnik A zwinął żagle, aby zmniejszyć opór powietrza. Zawodnik B postąpił inaczej: zauważył, że płynąc z prądem odczuwa jakby wiatr z przeciwka. Postawił więc żagle i zaczął halsować. Który wygrał wyścig?

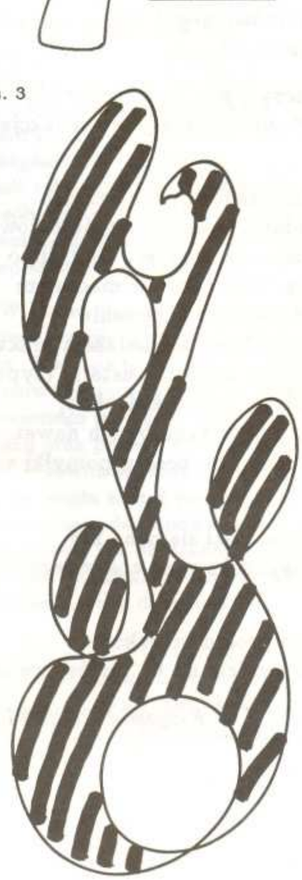


Rys. 2

170. Z początkowo nieruchomego pistoletu oddano strzał. Obliczyć „kąt podbicia" (kąt między początkowym kierunkiem lufy a torem pocisku) zakładając, że siła odrzutu działająca na pistolet w chwili strzału jest znacznie większa od siły działającej ze strony ręki. Dane: masa pocisku m, masa pistoletu M, moment bezwładności pistoletu względem środka masy I, środek masy pistoletu znajduje się w odległości h od początku lufy o długości l w kierunku prostopadłym do niej (rys. 3). Pominąć pęd gazów prochowych w porównaniu z pędem pocisku.



Rys. 3



Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1993

Przypominamy treść zadań:

161. Zbrodnia w ciemni fotograficznej
Inspektor Wnikliwy przesłuchiwał Męczysława Rozwałkę, fotografa z dalekiego przedmieścia Czarny Koniec.
– A więc, jeśli to nie ty zamordowałeś twojego wspólnika Naiwińskiego, to kto to zrobił?
– Nie znam go, panie inspektorze. Widziałem go tylko przez krótką chwilę, i to w słabym świetle lampy ciemniowej. Wywoływałem właśnie odbitki, gdy nagle usłyszałem hałas. Odwróciwszy się zobaczyłem biednego Naiwka na podłodze z nożem w plecach, i tamtego drania uciekającego. Był raczej niskiego wzrostu, miał na sobie zielony sweter i niebieskie spodnie. W uchu zauważyłem błyszczący kolczyk.
– Wystarczy, Rozwałko. Wyjątkowo nieudolnie kłamiesz – widać, że brakuje ci podstawowych wiadomości z fizyki. To zeznanie będzie koronnym dowodem przeciw tobie. Sierżancie, odprowadźcie go!
W jaki sposób inspektor Wnikliwy zdemaskował mordercę?

162. Strumień wody wypływa z poziomej rury. Prędkość wody w rurze zmienia się z odległością r od osi rury zgodnie ze wzorem $v(r) = v_0[1-(r/r_0)^2]$, gdzie r_0 jest promieniem rury, a maksymalna prędkość v_0 ma wartość 10 m/s. Zakładając, że dzięki siłom spójności strumień nie rozdzieli się, obliczyć wysokość spadku wody do chwili uderzenia w pionową ścianę odległą o 1 metr od wylotu rury.

161. Widmo światła lampy ciemniowej jest ograniczone do czerwieni, nie można więc przy takim oświetleniu widzieć różnych barw. Rozwałko musiał zmyślić opowiastkę o tajemniczym mordercy.

162. Załóżmy, że poszczególne elementy objętości wody zachowują w czasie spadku swoją prędkość poziomą (wydaje się to rozsądne ze względu na małą lepkość wody i dość krótki czas spadku). Przyjmijmy ponadto, że strumień będzie miał kształt paraboli $y = \frac{1}{2}kx^2$, gdzie x jest współrzędną poziomą, a y – pionową (ze zwrotem w dół). Z tych założeń wynika, że współrzędna x elementu o prędkości v zależy od czasu zgodnie ze wzorem $x = vt$, a współrzędna y – zgodnie ze wzorem $y = \frac{1}{2}kv^2t^2$, czyli przyspieszenie pionowe tego elementu wynosi $a = kv^2$. To przyspieszenie należy przyrównać do wyrażenia $g + \frac{F}{m}$, gdzie F jest siłą działającą na element o masie m ze strony innych elementów strumienia. Stąd $F = m(kv^2 - g)$. Jeśli rozpatrujemy część strumienia zawartą w warstwie cylindrycznej od promienia r do $r + \mathrm{d}r$, to jej objętość jest równa $2\pi r\mathrm{d}r \cdot l$, gdzie l – odległość od wylotu rury do ściany, a masa – $2\pi l\rho r\,\mathrm{d}r$. Oczywiście, łączna siła działająca między wszystkimi elementami musi być równa zeru, czyli otrzymujemy warunek w postaci

$$\int_0^{r_0} (kv_0^2(1-(r/r_0)^2)^2 - g)r\mathrm{d}r = 0.$$

Obliczając całkę znajdujemy $k = \frac{3g}{v_0^2}$, zatem strumień opadnie o $\frac{3gl^2}{2v_0^2} \approx 15$ cm. Wartość ta jest stosunkowo niewielka w porównaniu z odległością $l = 1$ m, co *post factum* usprawiedliwia niektóre z poczynionych przybliżeń (np. obliczanie objętości warstwy cylindrycznej, chociaż w rzeczywistości warstwa jest wygięta).