

Komplementarność

Marek CINAL

i Berthold-Georg ENGLERT

W mechanice klasycznej stan obiektu fizycznego jest opisany w pełni przez podanie wartości zmiennych dynamicznych charakteryzujących ten obiekt; w przypadku wyidealizowanego punktu materialnego tymi zmiennymi są: położenie punktu $\vec{r} = (x, y, z)$ i jego pęd $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Znając wszystkie siły działające na ten punkt materialny można, na podstawie praw Newtona, przewidzieć jego stan w dowolnej chwili w przeszłości i przyszłości. Tego typu przewidywanie nie jest możliwe dla obiektów mikroskopowych, np. atomów lub cząstek elementarnych, gdyż w świecie mikroskopowym nie jest możliwe jednoczesne określenie dokładnego położenia i pędu cząstki. Opisuje to kwantowo-mechaniczna relacja nieokreśloności Heisenberga

$$(*) \quad \delta x \delta p_x \geq \hbar/2,$$

gdzie δx (δp_x) jest dokładnością pomiaru składowej położenia x (składowej pędu p_x), $\hbar = h/(2\pi)$, h oznacza stałą Plancka. W teorii zjawisk mikroskopowych – mechanice kwantowej – stan cząstki opisuje się nie przez podanie wartości \vec{r} i \vec{p} , lecz przez podanie funkcji falowej $\varphi(\vec{r})$ określającej amplitudę prawdopodobieństwa znalezienia się cząstki w punkcie \vec{r} . Mierzalne wielkości fizyczne są reprezentowane wtedy przez operatory działające w przestrzeni funkcji falowych.

Mówimy, że dwie wielkości fizyczne są **komplementarne**, jeśli dokładna znajomość jednej z nich implikuje jednakowe prawdopodobieństwo każdego wyniku pomiaru drugiej. Przykładem wielkości komplementarnych są x i p_x . Wynika to w szczególności z relacji nieokreśloności (*). W przypadku ustalonego położenia cząstki pomiar jej pędu może dać dowolną wartość. I odwrotnie: cząstka o ustalonym pędzie może znajdować się w dowolnym punkcie. Oznacza to, że w zależności od tego, co z nią robimy, ujawnia swoje cechy korpuskularne (gdy dobrze określone jest jej położenie) lub falowe (gdy dobrze znamy jej pęd). Własność ta, nazywana korpuskularno-falowym charakterem materii, bywa często identyfikowana z komplementarnością. Komplementarność to jednak pojęcie znacznie ogólniejsze.

Sformułujmy teraz zasadę komplementarności.

Dla każdego stopnia swobody zmienne dynamiczne stanowią parę wielkości komplementarnych.

Można ją również bardziej swobodnie wyrazić następująco:
Niezależnie od tego, jak przygotowano układ, istnieje taki pomiar, którego wyniku zupełnie nie można przewidzieć.

Komplementarność jest własnością natury i, choć wydaje się niezgodna z naszym codziennym doświadczeniem, musimy jej istnienie przyjąć jako fakt. Największą zasługę w uświadomieniu nam tej fundamentalnej prawdy należy niewątpliwie przypisać Nielsowi Bohrowi. Nie przyszło mu to wcale łatwo, jednym z głównych oponentów był sam Albert Einstein.

Punkty szczególne trójkąta

Jarosław GÓRNICKI

W geometrii elementarnej na płaszczyźnie dwie figury odgrywają bardzo ważną rolę – trójkąt i koło. Przedstawię kilka faktów dotyczących trójkątów, które to fakty stanowią fragment tzw. *geometrii trójkąta*.

Od dawna znane są własności przecinania się w jednym punkcie:

- symetrycznych trzech boków trójkąta,
- dwusiecznych trzech kątów wewnętrznych trójkąta,
- prostych zawierających wysokości trójkąta,
- środkowych trzech boków trójkąta.

W 1803 roku Klügel nadał tym i podobnym im punktom nazwę *punkty szczególne trójkąta*, gdyż każdy z nich jest wyznaczony przez większą liczbę warunków, niż jest to potrzebne do jednoznacznego wyznaczenia punktu. Mianowicie, każdy z powyższych punktów wyznaczony jest przez trzy proste, mimo że punkt jest jednoznacznie wyznaczony przez dwie. Później termin ten rozszerzono również na inne punkty trójkąta wyróżnione przez jakąś własność, np. ekstremalną, pewnych funkcji związanych z trójkątem. Takimi punktami są na przykład:

- punkt Torricellego, dla którego suma odległości od wierzchołków trójkąta osiąga minimum;
- punkt Lemoine'a, dla którego suma odległości od wszystkich trzech boków trójkąta osiąga minimum;
- punkty Brocarda (mogą być dwa) mające tę własność, że trójkąty o wierzchołkach będących rzutami prostopadłymi tych punktów na poszczególne boki danego trójkąta są do niego podobne oraz mają najmniejsze pole wśród wszystkich trójkątów wpisanych w dany trójkąt i podobnych do trójkąta wyjściowego.

Jak te punkty wyznaczyć?

Wskażemy metodę pozwalającą na niemal jednoczesne uzasadnienie wymienionych na samym początku czterech faktów. W tym celu zaprezentujemy łatwe do zapamiętania twierdzenia dwojakiego rodzaju: opisujące warunki, przy których kilka wyróżnionych punktów (więcej niż dwa) leży na jednej prostej; oraz warunki gwarantujące, że kilka wyróżnionych prostych (więcej niż dwie) przecina się w jednym punkcie.

Około 80 r.n.e. Menelaus z Aleksandrii wykazał:

Twierdzenie 1. Jeżeli prosta nie przechodząca przez żaden wierzchołek trójkąta ABC przecina jego boki AB , BC , CA lub ich przedłużenia odpowiednio w punktach M , N , P , to

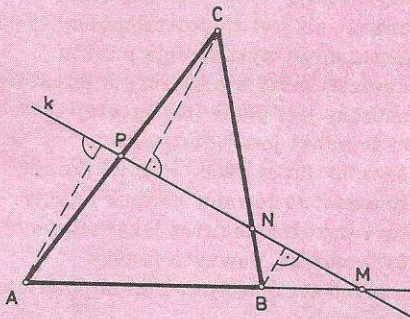
$$(1) \quad \frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1.$$

Dowód. Prowadzimy prostą k zgodnie z warunkami twierdzenia. Z wierzchołków trójkąta ABC prowadzimy odcinki prostopadłe do prostej k (rys. 1, 2), których długości wynoszą odpowiednio d_A , d_B , d_C . Korzystając z twierdzenia Talesa mamy:

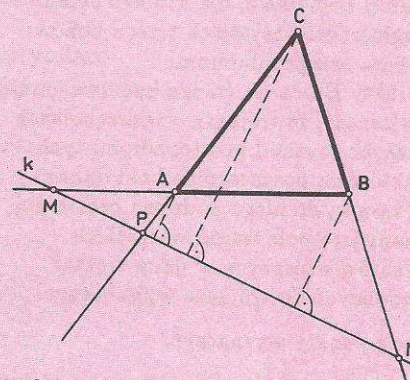
$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{d_A}{d_B}, \quad \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{d_B}{d_C}, \quad \frac{|CP|}{|PA|} = \frac{d_C}{d_A},$$

a stąd

$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1. \quad \blacksquare$$



Rys. 1



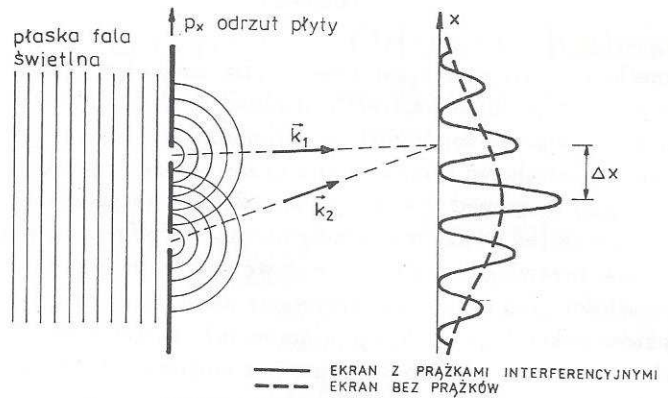
Rys. 2

Prawdziwe jest również, łatwe do udowodnienia, twierdzenie odwrotne: Niech na prostych AB , BC , CA leżą odpowiednio punkty M , N , P , z których żaden nie jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Jeśli wyznaczają one odcinki spełniające warunek (1) oraz parzysta ich liczba leży na bokach trójkąta, to punkty M , N , P leżą na jednej prostej.

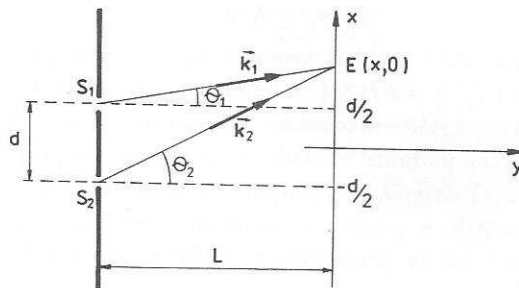
Czy komplementarność zawsze jest wymuszana przez zasadę nieokreśloności lub jej jakiś wariant?

Klasycznym przykładem, przy tej okazji omawianym w podręcznikach i na wykładach, jest doświadczenie myślowe Einsteina-Bohra (rys. 1).

a)



b)



Rys. 1 Schemat eksperymentu Einsteina-Bohra. Ponieważ długość fali świetlnej λ nie zmienia się, zatem $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \frac{2\pi}{\lambda} \equiv k$. Składowe obu wektorów falowych wynoszą (dla $l \gg d$):

$$k_x^{(i)} = k \sin \theta_i \approx k \theta_i \approx k \frac{x + s_i d/2}{L},$$

$$k_y^{(i)} = k \cos \theta_i \approx k \left(1 - \frac{1}{2} \theta_i^2\right) \approx k \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x + s_i d/2}{L}\right)^2\right], \quad i = 1, 2,$$

gdzie $s_1 = -1$, $s_2 = 1$. Stąd mamy

$$(**) \quad \Delta k_x = k_x^{(2)} - k_x^{(1)} = \frac{kd}{L}.$$

Faza fali kulistej rozchodzącej się od i -tej szczeliny wynosi w punkcie E na ekranie

$$\phi_i = \vec{k}_i \cdot \vec{S}_i \vec{E} = k_x^{(i)}(x + s_i d/2) + k_y^{(i)} L.$$

Zatem różnica obydwu faz równa się

$$\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{kd}{L} x.$$

$\Delta \phi = 0$ w punkcie centralnego maksimum: $x = 0$. Zwiększając x od 0 do Δx znajdziemy się w punkcie pierwszego boczego maksimum, gdzie $\Delta \phi = 2\pi$. Stąd

$$\Delta x = \frac{2\pi L}{kd},$$

a następnie korzystając z (***) otrzymujemy

$$\Delta k_x \Delta x = 2\pi.$$

A więc pęd fotonu (składowa x -owa), który dotarł do punktu E na ekranie przelatując przez szczelinę S_2 , będzie się różnił od pędu fotonu, który dotarł tam przez szczelinę S_1 , o wielkość

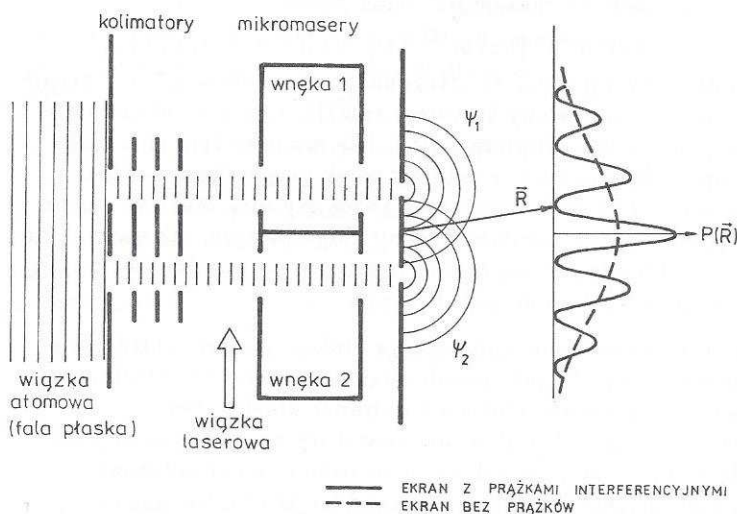
$$\Delta p_x = \hbar \Delta k_x = \frac{h}{\Delta x}.$$

A zatem, aby odróżnić jedną drogę fotonu od drugiej, pęd płyty musi być wyznaczony z błędem mniejszym niż ta różnica, tzn. $\delta p_x \ll h/\Delta x$. Wówczas jednak z zasady nieokreśloności (*) wynika, że nieokreśloność położenia płyty δx jest większa od Δx , czyli odległości między sąsiednimi prążkami interferencyjnymi. To jednak oznacza sprzeczność, gdyż warunkiem koniecznym powstania obrazu interferencyjnego jest $\delta x < \Delta x$.

Pojedyncze fotony (lub elektrony) po przejściu przez układ otworów w przesłonie tworzą na ekranie charakterystyczny układ prążków interferencyjnych. Wydawać by się mogło, że obserwując kierunek odrzutu przesłony na skutek zmiany kierunku lotu fotonu (lub elektronu) od źródła do ekranu, można bez zniszczenia obrazu interferencyjnego stwierdzić, przez który otwór przeszedł foton (lub elektron). Do tego potrzebna jest jednak dokładna znajomość pędu przesłony. Zasada nieokreśloności (*) wymaga wtedy dużej nieokreśloności jej położenia. Wówczas nieokreśloność ta staje się większa od odległości między sąsiednimi prążkami interferencyjnymi i obraz interferencyjny ginie.

Odpowiedź na postawione powyżej pytanie, czy komplementarność wynika z relacji nieokreśloności, powinna jednak brzmieć: nie!

W powyższym eksperymencie, gdy chcemy zarejestrować, przez który otwór przeszedł foton (lub elektron), przesłona zaburza jego ruch w sposób przypadkowy i niekontrolowany. Od niedawna umiemy jednak konstruować takie detektory, które nie zaburzają istotnie ruchu obserwowanych obiektów. Detektorem takim może być wnęka rezonansowa mikromasera, a obiektami atomy. Rozważmy teraz układ eksperymentalny przedstawiony schematycznie na rysunku 2.



Rys. 2. Zmodyfikowany eksperyment Einsteina-Bohra, pozwalający na określenie drogi fotonu bez zaburzenia jego ruchu.

Atomy po przejściu przez układ kolimatorów (szerokich szczelin) są oświetlane wiązką laserową, a następnie przelatują przez jedną z dwu mikromaserowych wnęk rezonansowych, po wyjściu z której trafiają na odpowiadającą jej szczelinę w płycie. Atomy są rejestrowane na ekranie ustawionym za płytą. W nieobecności lasera i wnęk rezonansowych tworzy się znany obraz interferencyjny. W obszarze za płytą funkcja falowa φ opisująca ruch środka masy atomu jest sumą dwu członów odpowiadających dwóm szczelinom: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Wówczas gęstość prawdopodobieństwa $|\varphi|^2$ znalezienia atomu w danym punkcie ekranu wynosi

$$|\varphi|^2 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \varphi_1^* \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2^*.$$

Wyrażenia $\varphi_1^* \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2^*$ są, oczywiście, odpowiedzialne za powstanie charakterystycznych prążków interferencyjnych.

Posługując się twierdzeniem Menelausa możemy uzasadnić ważny rezultat z geometrii trójkąta. Opublikował go w pracy *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (Milano, 1678) włoski inżynier Giovanni Ceva.

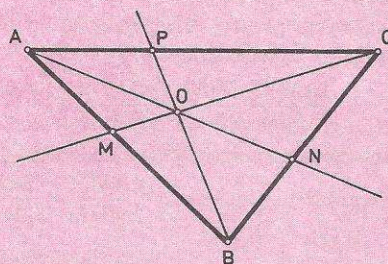
Twierdzenie 2. Jeżeli trzy proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC i nie zawierające żadnego boku trójkąta przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe, to odcinki wyznaczone przez punkty M, N, P (punkty przecięcia się tych prostych odpowiednio z bokami AB, BC, CA lub ich przedłużeniami) spełniają warunek (1).

Dowód. Gdy proste przecinają się w jednym punkcie, to przy powyższych oznaczeniach (rys. 3, 4) stosujemy twierdzenie Menelausa do trójkąta ABP i prostej CO :

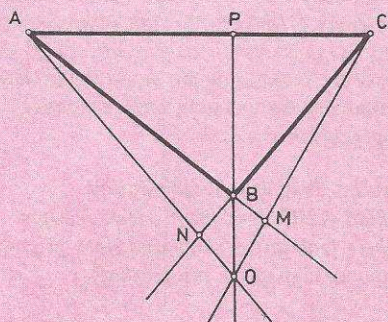
$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BO|}{|OP|} \cdot \frac{|PC|}{|CA|} = 1;$$

oraz do trójkąta BCP i prostej AO :

$$\frac{|PO|}{|OB|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CA|}{|AP|} = 1.$$



Rys. 3



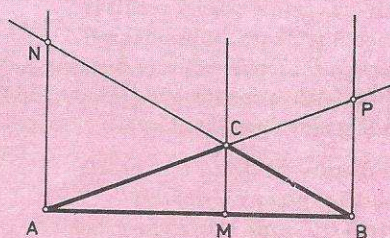
Rys. 4

Mnożąc te równości stronami otrzymujemy (1). Gdy $AN \parallel BP \parallel CM$ (rys. 5), to

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AN|}{|NB|}, \quad \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|BP|}{|PC|},$$

$$\frac{|CP|}{|PA|} = \frac{|CM|}{|MA|},$$

skąd po wymnożeniu stronami otrzymujemy (1). ■



Rys. 5

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 3. Jeżeli trzy proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC i nie zawierające żadnego boku trójkąta wyznaczają na bokach AB , BC , CA lub ich przedłużeniach takie punkty M , N , P , że spełniony jest związek (1) oraz nieparzysta ich liczba leży na bokach trójkąta, to proste te przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

Dowód. Załóżmy, że proste AN i BP przecinają się w punkcie O i prosta CM nie zawiera punktu O . Wtedy prosta CO wyznacza na prostej AB punkt $M' \neq M$. Wówczas z twierdzenia Cevy

$$\frac{|AM'|}{|M'B|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1$$

i jednocześnie spełniony jest warunek (1).

Porównując je, dostajemy $\frac{|AM'|}{|M'B|} = \frac{|AM|}{|MB|}$,

czyli $\frac{|AM'|}{|AM|} = \frac{|M'B|}{|MB|}$. Ostatnia równość

jest fałszywa, gdyż jeden ułamek jest mniejszy od 1, a drugi większy od 1.

Równie łatwo zauważamy: jeżeli $AN \parallel BP$, to również CM jest do nich równoległa. ■

Zobaczmy teraz, jak można wykorzystać te rezultaty do uzasadnienia na pozór odległych faktów.

Fakt 1. Trzy dwusieczne kątów trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie (jak łatwo zauważyć, jest to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt).

Dowód. Dwusieczna kąta B (rys. 6) dzieli bok CA punktem P na odcinki

$$\text{spełniające warunek } \frac{|CP|}{|PA|} = \frac{|CB|}{|BA|}.$$

Wynika to z twierdzenia Talesa

zastosowanego do kąta C przeciętego prostymi równoległymi AD i BP oraz z faktu, że $|AB| = |BD|$. Analogicznie

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AC|}{|CB|}, \quad \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

a stąd wynika (1). Korzystamy teraz z twierdzenia 3 (odwrotnego do twierdzenia Cevy) i już! ■

W przypadku atomów możemy wykorzystać jeszcze dodatkowe stopnie swobody związane ze strukturą atomu. Możemy wiązką laserową pobudzić atomy z ich stanu podstawowego do stanu wzbudzonego. Gdy jeden z takich wzbudzonych atomów dostanie się do wnęki rezonansowej mikromasera, to może wystąpić silne sprzężenie z promieniowaniem w jej wnętrzu, w wyniku czego atom wyemituje foton i przejdzie do innego stanu. To przejście z emisją fotonu można obecnie przeprowadzić z prawdopodobieństwem praktycznie równym 1, nawet jeśli wnęka początkowo nie zawierała żadnego fotonu (mówimy, że wnęka była ultrazimna). Zatem po przejściu wzbudzonego atomu przez wnękę zostaje po nim ślad – foton. Wnęka jest więc detektorem przelotu atomu. Warto podkreślić, że proces oddziaływania atomu z polem wnęki i emisja fotonu nie zakłócają w znaczącym stopniu części funkcji falowej atomu związanej z ruchem jego środka masy.

Wróćmy do układu eksperymentalnego z dwiema ultrazimnymi wnękami rezonansowymi. Po przelocie pojedynczego atomu pełna funkcja falowa za przesłoną jest teraz następująca

$$\varphi = \varphi_1 \chi_{10} + \varphi_2 \chi_{01},$$

gdzie nowe czynniki χ_{10} i χ_{01} opisują stany wnęk rezonansowych; indeks 0 lub 1 na pierwszym miejscu oznacza, że w pierwszej wnęcie nie ma (0) lub jest (1) foton, indeks na drugim miejscu opisuje stan drugiej wnęki. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia się atomu w danym punkcie na ekranie jest teraz postaci

$$|\varphi|^2 = |\varphi_1 \chi_{10}|^2 + |\varphi_2 \chi_{01}|^2 + \varphi_1^* \varphi_2 \chi_{10}^* \chi_{01} + \varphi_1 \varphi_2^* \chi_{10} \chi_{01}^*.$$

Ponieważ stany χ_{10} i χ_{01} są ortogonalne, to wielkość $\chi_{10}^* \chi_{01}$ zeruje się, interferencyjne człony krzyżowe znikają, zatem na ekranie nie pojawiają się prążki interferencyjne. Nie ma przy tym znaczenia, czy foton, który pozostał w jednej z wnęk po przelocie każdego atomu, został zarejestrowany przez kogoś czy nie. Może wcale nie być obserwowany lub zaobserwowany długo po tym, jak atom dotarł do ekranu. Istotne jest to, że informacja (w postaci fotonu) o tym, którą drogę wybrał atom, jest dostępna.

Wnęki mikromasera nie wpływają na funkcje φ_1 i φ_2 określające ruch środka masy. W ten sposób osiągnięty został cel Einsteina: możliwe jest uzyskanie informacji o drodze obiektu bez niekontrolowanego oddziaływania aparatury pomiarowej na jego pęd. Bohr nie miałby jednak nic przeciwko temu rezultatowi, gdyż po pozostawieniu informacji o drodze atomu (to jest po emisji fotonu we wnęcie) atom traci zdolność do interferencji. Komplementarność jest więc znowu obecna; nie jest ona w tym przypadku wymuszona przez relację nieokreśloności Heisenberga, lecz przez korelację między stanem aparatury pomiarowej a obserwowanym obiektem. Relacja nieokreśloności Heisenberga (*) nie stosuje się tutaj; nasza argumentacja nie odwołuje się do niej. Fizycznie oznacza to, że relacji tej nie podlega użyty sposób detekcji, gdyż ze zlokalizowanym fotonem we wnęcie nie można związać określonego pędu.

I jeszcze uwaga o mikromaserach. Mogą one służyć jako detektory drogi atomów, jeśli jeden foton pozostawiony we wnęcie zmieni pole elektromagnetyczne na tyle, że zmiana ta jest obserwowalna. Z taką sytuacją mamy do czynienia w rozważanym wyżej przypadku ultrazimnych wnęk nie zawierających początkowo fotonów. Gdy wnęki zawierają początkowo klasyczne pole mikrofalowe, a więc mnóstwo fotonów, zmiana pola o jeden foton nie jest zauważalna. Eksperymenty z ultar zimnymi wnękami rezonansowymi są prowadzone już od kilku lat, ale idea doświadczenia przedstawiona w tym artykule ciągle czeka na realizację.

Łezki batawskie

I. Rozważmy kulę stopionego szkła o jednakowej temperaturze wystawioną na działanie zimnego powietrza. Jej warstwa zewnętrzna znacznie szybko krzepnąć, a warstwy wewnętrzne zachowują jeszcze poprzednią temperaturę. Warstwa zewnętrzna musi zatem objąć objętość odpowiadającą początkowej (wyższej) temperaturze. W miarę dalszego stygnięcia warstwy wewnętrzne „starają się” kurczyć i krzepnąć. Lecz „przeszkadza im” w tym sztywna już warstwa zewnętrzna. Z powodu „ściągnięcia” do środka podlega ona zatem ścisnaniu; powstają w niej naprężenia ściskające. A w warstwach wewnętrznych, „ciągniętych” przez nią, wytwarzają się naprężenia rozciągające.

Wytrzymałość szkła na ścisnienie jest o wiele większa niż na rozciąganie: wynosi ona zwykle 60–125 kg/mm² – wobec, typowo, 3,5–8 kg/mm² dla rozciągania.

Dlatego taka kula szklana może wytrzymać duże obciążenia, zwłaszcza że dzięki kulistemu kształtowi zakłócenie równowagi naprężeń jest trudniejsze. Jeżeli jednak uszkodzi się powierzchnię kuli, to cały układ rozpada się na liczne kliniaste odpryski z powodu naprężeń rozciągających we wnętrzu szkła.

II. Inaczej zachowują się ciała o kształcie asymetrycznym – takie jak łezki batawskie (niem. „Glastränen”). Wytwarzają się one wtedy, gdy do wody wlewa się kroplami rzadko-płynne stopione szkło. I znowu: warstwy zewnętrzne tych kropli krzepną bardzo szybko i powstają w nich silne naprężenia ściskające. Taka łezka okazuje się bardzo odporna na uderzenie!

Jeśli jednak zakłóci się w niej równowagę naprężeń – np. przez odłamanie „ogonka” – to cała łezka momentalnie rozsypuje się na proszek. Jeśli zaś ogonek zmniejszać stopniowo – np. przez powolne, ostrożne trawienie w kwasie fluoro-wodorowym, to rozpad łezki nastąpi dopiero wtedy, gdy trawienie dojdzie do miejsca, w którym (grubszy u nasady) ogonek szybciej zmniejsza swą średnicę.

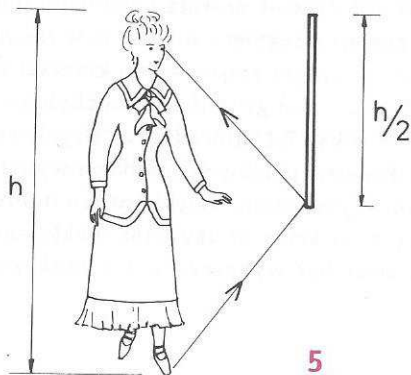
Dralle-Keppeler *Die Glasfabrikation*, I Band, II Aufl., 1930, s. 241.
tłum. J. JABLKOWSKI

– Jakiej wysokości musi być lustro w moim przedpokoju, abym mógł się w nim cały obejrzeć? – zapytał znajomego matematyka (P.H.) i fizyka (St.M.).

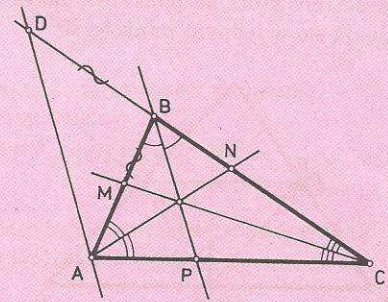
– To zależy od twojego wzrostu i odległości, w jakiej staniesz – odparli i zabrali się do wyprowadzania wzorów.

Przerwałem im, nim doszli do całek eliptycznych.

– Musi być co najmniej połowy mojego wzrostu! Spójrzcie na rysunek.



5



Rys. 6

Fakt 2. Trzy środkowe boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie (jest to środek ciężkości trójkąta).

Dowód. Wynika bezpośrednio z twierdzenia 3. ■

Przy okazji sugerujemy 2 zadania:

I. Wykazać, że środkowe trójkąta dzielą ten trójkąt na 6 mniejszych trójkątów o równych polach.

II. Uzasadnić, że środkowe w trójkącie dzielą się w stosunku 2:1.

Fakt 3. Trzy proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie (zwanym ortocentrum trójkąta).

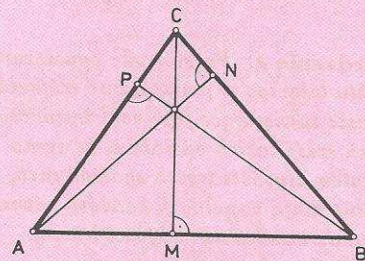
Dowód. W trójkącie prostokątnym jest to oczywiste. W pozostałych przypadkach korzystamy z podobieństwa odpowiednich trójkątów (rys. 7):

$$a) \triangle ABP \sim \triangle ACM \text{ i } \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AP|}{|AM|},$$

$$b) \triangle ABN \sim \triangle MBC \text{ i } \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BN|}{|MB|},$$

$$c) \triangle BPC \sim \triangle ANC \text{ i } \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|PC|}{|NC|}.$$

Mnożąc b) przez c), a następnie dzieląc przez a) i porządkując otrzymujemy (1). Korzystając teraz z twierdzenia 3 dostajemy tezę. ■



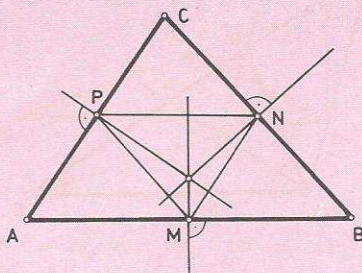
Rys. 7

Fakt 4. Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie (jak łatwo zauważyć, jest to środek okręgu opisanego na tym trójkącie).

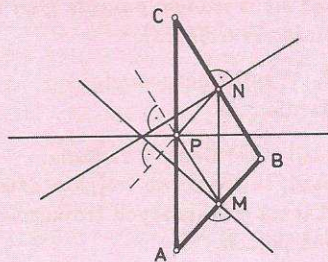
Dowód. W obu przypadkach (rys. 8, 9) punkty, w których wystawiono symetralne, wyznaczają nowy trójkąt MNP.

K.B.

Symetralne te są dla tego trójkąta wysokościami, które na podstawie faktu 3 przecinają się w jednym punkcie. ■



Rys. 8



Rys. 9

W podobny sposób można uzasadnić i inne fakty, np.

Fakt 5. Proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgu wpisanego przecinają się w jednym punkcie (zwanym punktem Gergonne'a).

Fakt 6. Proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych przecinają się w jednym punkcie (zwanym punktem Nagela).

Wiele z zaprezentowanych tu twierdzeń doczekało się różnorodnych przeformułowań i uogólnień. Ich poznanie może być interesujące. Ponadto fakty 3 i 4 można uzasadnić w oparciu o inne twierdzenie, „podobne” do twierdzenia Cevy:

Twierdzenie 4. Prostopadłe opuszczone z punktu leżącego w płaszczyźnie trójkąta na proste zawierające jego boki wyznaczają na nich sześć takich odcinków, że suma kwadratów długości trzech spośród nich, które nie mają wspólnych końców, równa jest sumie kwadratów długości trzech pozostałych.

Dowód. Niech OP , OM , ON będą prostopadłymi opuszczonymi z dowolnego punktu O odpowiednio na proste zawierające boki AB , BC , CA (rys. 10). Wówczas

$$|AO|^2 - |AP|^2 = |BO|^2 - |BP|^2,$$

czyli

$$|AP|^2 - |BP|^2 = |AO|^2 - |BO|^2.$$

Nowe zastosowania kryształów w fizyce wysokich energii

W fizyce wysokich energii powszechnie wykorzystuje się wiązki rozprędzonych cząstek elementarnych, np. protonów, antyprotonów, elektronów do badania struktury materii i praw rządzących w mikroświecie. Często po przyspieszeniu cząstek należy je wyprowadzić z akceleratora i doprowadzić wiązkę do miejsca, gdzie wykonuje się doświadczenia z ich udziałem. W tym celu używa się zwykle magnesów, które mogą zakrzywić tor lotu cząstek naładowanych na skutek działania siły Lorentza $F = qv \times B$, gdzie q jest ładunkiem elektrycznym cząstki, v – jej prędkością, a B natężeniem pola magnetycznego. Odchylenia toru szybkiej cząstki nawet o niewielki kąt wymaga bardzo silnych i długich magnesów. Na przykład, aby odchylić protony o energii $E = 450$ GeV (dla porównania energia spoczynkowa protonu wynosi $mc^2 = 0,938$ GeV, gdzie $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) o kąt $7,4$ miliradiana, używa się magnesu wytwarzającego pole magnetyczne o natężeniu dwóch tesli (T) i długości około 6 m.

Od pewnego czasu prowadzone są doświadczenia nad wykorzystaniem kryształów do odchylenia toru wysokoenergetycznych cząstek. Zjawisko leżące u podstaw tych zastosowań nosi nazwę kanałowania cząstek (*channeling*). Jak wiadomo, w kryształach istnieją dobrze określone płaszczyzny i osie atomowe. Okazuje się, że jony (lub inne cząstki elementarne) padające na kryształ pod małym kątem do tych płaszczyzn lub osi są kanałowane, to znaczy ich tory są wymuszane przez układ płaszczyzn lub osi atomów, a głębokość penetracji jonów w kryształach jest znacznie większa niż w ośrodkach amorficznych. Na tego typu możliwość zwracał uwagę J. Stark już w 1912 r.! (co, jak widać, zostało stwierdzone doświadczalnie dopiero po ponad 50. latach).

Kanałowanie odegrało istotną rolę w początkowej fazie badań nad implantacją jonów w kryształach i przyczyniło się do rozwoju technologii półprzewodników. Obecnie kanałowanie wykorzystywane jest w wielu dziedzinach nauki i techniki. W artykule tym omawiamy jedynie nowe możliwości zastosowań kryształów w oparciu o zjawisko kanałowania w fizyce wysokich energii.

Jeśli ruch cząstek w kryształach jest wymuszany przez układ płaszczyzn i osi atomów, to wyginając kryształ w odpowiedni sposób można regulować tor cząstek. Ten pomysł został po raz pierwszy zrealizowany w 1984 r. w Instytucie Fizyki Wysokich Energii (IHEP) w Sierpuchowie koło Moskwy i w Laboratorium Fermiego (FERMILAB) koło Chicago udało się odchylić wiązki naładowanych cząstek za pomocą kryształu krzemu o kąty $60\text{--}80$ miliradianów. Niestety, efektywność pierwszych prób była niewielka, rzędu 10^{-4} , to znaczy średnio jedna na 10^4 cząstek została odchylna pod żądanym kątem. Istotny postęp osiągnięto w 1989 r. w laboratorium CERN w Genewie. W doświadczeniu zastosowano kryształ krzemu o wymiarach 4 cm długości i $0,9$ mm grubości do odchylenia wiązki protonów o energii 450 GeV o kąt $7,4$ miliradiana. Uzyskano więc ten sam efekt, który przy konwencjonalnych wiązkach wymaga sześciometrowego magnesu! Tym razem, dzięki bardzo dobrej kolimacji cząstek padających na kryształ uzyskano efektywność 15% , co oznacza, że metoda ta może być wykorzystana w praktyce.

Oprócz tych zastosowań kryształy mogą być również używane do ogniskowania wiązek cząstek elementarnych o wysokich energiach. Zademonstrował to w 1991 r. zespół fizyków z Sierpuchowa, a pomysł polegał na uformowaniu tylnej ścianki kryształu w kształcie łuku. Cząstki kanałowane w różnych częściach (płaszczyznach) kryształu są zginane pod różnym kątem, co prowadzi w efekcie do ogniskowania wiązki. W doświadczeniu użyto kryształu w postaci płytki płytki krzemowej o wymiarach $2 \times 15 \times 70$ mm, wygiętej o 24 miliradiany, z tylną ścianką. Jak na razie efekt ogniskowania uzyskano w jednym wymiarze, ogniskując wiązkę 10^7 protonów o szerokości 2 mm, z rozrzutem kątowym $\pm 0,1$ miliradiana, do wiązki o szerokości 0,2 mm w odległości 3,5 metra od kryształu. Końcowa intensywność wiązki wynosiła $3 \cdot 10^5$ protonów.

Najnowsze doświadczenia przeprowadzone w ośrodku FERMILAB pod koniec ubiegłego roku wykazały, że w zakrzywionych kryształach możliwa jest również precesja magnetyczna cząstek elementarnych. Wiele cząstek elementarnych ma momenty magnetyczne związane z wewnętrznym momentem pędu – spinem. Cząstka poruszająca się z dużą prędkością w wewnętrznym polu elektrycznym kryształu „odczuwa” silne pole magnetyczne. Pole magnetyczne „stara się” ustawić momenty magnetyczne cząstek, a tym samym i spiny, równoległe do pola. Wywołuje to precesję, to znaczy obrót spinu wokół kierunku pola magnetycznego (tak samo, jak pole grawitacyjne powoduje obrót osi wirującego bąka wokół pionu). W doświadczeniu wykorzystano dwa kryształy krzemu o długości 45 mm zagięte o $0,1^\circ$ i zaobserwowano obrót o około 60° momentów magnetycznych cząstek pochwyconych w kanał. Efektywne pole magnetyczne w kryształach wynosiło 45 T.

Standardowo momenty magnetyczne cząstek stabilnych, takich jak proton, są mierzone w laboratoriach techniką rezonansową: momenty magnetyczne protonów ustawione w zewnętrznym polu magnetycznym można odwrócić dobierając dodatkowe pole. Niestety, te tradycyjne techniki rezonansowe nie dają się zastosować do wysoce niestabilnych cząstek, takich jak hiperony Σ . Jeżeli hiperon jest produkowany w reakcji jądrowej ze spinem skierowanym wzdłuż określonego kierunku, przyłożone pole magnetyczne działające wzdłuż innego kierunku spowoduje precesję spinu. Ten efekt wykorzystuje się do pomiaru momentu magnetycznego hiperonu Σ , który, choć krótkożyciowy, żyje jednak dostatecznie długo, aby precesja spinu uwidoczniła się w rozkładach kątowych produktów rozpadu.

Doświadczenie w FERMILAB-ie jest mało precyzyjnym pomiarem momentu magnetycznego, otwiera nowe możliwości pomiaru momentu magnetycznego cząstek rozpadających się 1000 razy szybciej niż hiperon Σ : barionów powabnych (*charm*) i pięknych (*beauty*). Znajomość tych momentów pozwoli uzyskać ważne informacje o kwarkach powabnych i pięknych, będących składnikami tych barionów.

Na podstawie artykułów zamieszczonych w *CERN Courier* z maja 1990 r., listopada 1991 r. i stycznia/lutego 1993 r. opracowała

Maria KRAWCZYK

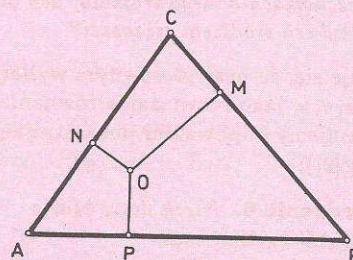
Analogicznie

$$\begin{aligned} |BM|^2 - |CM|^2 &= |BO|^2 - |CO|^2, \\ |CN|^2 - |AN|^2 &= |CO|^2 - |AO|^2. \end{aligned}$$

Dodając te równości stronami otrzymujemy

$$\begin{aligned} |AP|^2 + |BM|^2 + |CN|^2 &= \\ &= |BP|^2 + |CM|^2 + |AN|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Metodą nie wprost łatwo udowodnić twierdzenie odwrotne.



Rys. 10

Twierdzenie 5. Jeżeli trzy punkty leżące na prostych zawierających boki trójkąta tak wyznaczają sześć odcinków, że suma kwadratów trzech spośród nich, nie mających wspólnych końców, równa jest sumie kwadratów trzech pozostałych odcinków, to te trzy punkty są rzutami pewnego punktu na proste zawierające boki trójkąta.

Stąd jako wnioski otrzymujemy trzy znane już fakty:

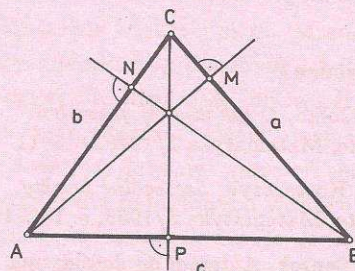
Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Przypadek symetralnych jest oczywistym wnioskiem z twierdzenia 5. Zajmijmy się teraz wysokościami. Mamy (rys. 11)

$$\begin{aligned} |BP|^2 - |AP|^2 &= a^2 - b^2, \\ |CM|^2 - |BM|^2 &= b^2 - c^2, \\ |AN|^2 - |CN|^2 &= c^2 - a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Stąd } |AP|^2 + |BM|^2 + |CN|^2 &= \\ &= |BP|^2 + |CM|^2 + |AN|^2. \blacksquare \end{aligned}$$



Rys. 11

Zwróćmy jeszcze uwagę na „mechaniczną” interpretację kilku punktów szczególnych trójkąta jako środków mas punktów

NOWINKI FIZYCZNE

Doświadczenie Younga na dwóch atomach

materiałnych umieszczonych w wierzchołkach trójkąta. Możemy bowiem dla niewspółliniowych punktów A, B, C i liczb rzeczywistych u, v, w poszukiwać takiego punktu P płaszczyzny, aby spełnione było równanie

$$(2) \quad u \cdot \overrightarrow{PA} + v \cdot \overrightarrow{PB} + w \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

Jest to problem w pewnym sensie odwrotny do zagadnienia A. Möbiusa z 1827 roku: *Jakie masy należy umieścić w wierzchołkach danego trójkąta, aby dany punkt był ich środkiem ciężkości?*

Okazuje się, że przy stosownym wyborze liczb u, v, w jako rozwiązaniem równania (2) otrzymujemy odpowiedni punkt trójkąta (patrz [2]):

Twierdzenie 6. Niech dany będzie trójkąt ABC . Wówczas:

- i) jeżeli $u = v = w = 1$, to rozwiązaniem równania (2) jest punkt przecięcia się środkowych trójkąta;
- ii) jeżeli $u = a, v = b, w = c$, gdzie a, b, c są długościami boków trójkąta, to rozwiązaniem równania (2) jest punkt przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta;
- iii) jeżeli $u = \sin 2\alpha, v = \sin 2\beta, w = \sin 2\gamma$, gdzie α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta, to rozwiązaniem równania (2) jest punkt przecięcia się symetralnych boków trójkąta;
- iv) jeżeli $u = \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma, v = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\gamma, w = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$, to rozwiązaniem równania (2) jest punkt przecięcia się prostych zawierających wysokości trójkąta.

O wielu innych faktach związanych z trójkątami, o szczególnych prostych trójkąta, o szczególnych okręgach trójkąta można dowiedzieć się z książki [4].

Na zakończenie proponuję

Zadanie Hugona Steinhausa.

Czy w dowolnym trójkącie ostrokątnym leży zawsze taki punkt S , że poprowadzone z niego prostopadłe do boków dzieli pole trójkąta na trzy równe części?

O ile mi wiadomo, rozwiązanie tego zadania nie jest znane.

Literatura

1. S. Gołąb, *O tak zwanej geometrii trójkąta*, *Matematyka* 1/1948, s. 5–11.
2. W. Kostarczyk, *Szczególne punkty trójkąta*, *Matematyka* 3/1985, s. 142–157.
3. M. Szurek, *Automat do dowodzenia twierdzeń*, *Delta* 5/1983, s. 1–3.
4. S.I. Zetel, *Geometria trójkąta*, PZWS, Warszawa 1964.

W ostatnich latach olbrzymie postępy w manipulowaniu pojedynczymi atomami pozwoliły na przeprowadzanie spektakularnych doświadczeń, które do niedawna uważane były jedynie za doświadczenia myślowe. Jednym z takich eksperymentów jest doświadczenie Younga rozpraszania fotonów lub cząstek na dwóch szczelinach w kontekście dualizmu korpuskularno-falowego i pytania „którą drogą” w mechanice falowej. Często w dyskusji tego typu doświadczeń relacja nieoznaczoności Heisenberga dla położenia i pędu jest wykorzystywana na dowód, że nie można określić, którą drogą przeleciał foton lub cząstka, bez zaburzenia charakterystycznego obrazu interferencyjnego.

W artykule Cinala i Englerta na str. 1–4 tego numeru *Delta* problem ten jest dyskutowany bardziej szczegółowo oraz omówione są tam nowe doświadczenia z wykorzystaniem wnęk mikromaserowych, w których znikanie interferencji jest wynikiem korelacji między obserwowanym systemem i aparaturą pomiarową, a nie bezpośrednią konsekwencją zasady nieoznaczoności. W tomie 70 czasopisma *Physical Review Letters* przedstawiona została inna realizacja tego samego pomysłu. W artykule autorstwa U. Eichmanna i współpracowników przedstawione są wyniki doświadczeń z rozpraszania światła na dwóch jonach rtęci $^{198}\text{Hg}^+$ uwięzionych w tzw. liniowej pułapce Paula. Rozproszone światło daje typowy obraz złożony z prążków interferencyjnych, gdyż światło może się rozproszyć albo na jednym, albo na drugim jonie. Mamy więc inną realizację klasycznego rozpraszania Younga.

W doświadczeniu tym można również uzyskać informację o drodze fotonu wykorzystując wewnętrzną strukturę jonów. Jony były oświetlane światłem laserowym liniowo spolaryzowanym o długości fali $\lambda = 194$ nm tak dobranej, aby odpowiadało to przejściu jonów rtęci między stanami podstawowymi ($6s^2S_{1/2}$) i jednym ze stanów wzbudzonych ($6p^2P_{1/2}$). Każdy z tych stanów jest podwójnie zdegenerowany ze względu na magnetyczną liczbę kwantową m_J . Dzięki temu możliwe są różne stany końcowe fotonu i jonów po rozproszeniu. Pochłonięcie fotonu liniowo spolaryzowanego powoduje przejście jonu ze stanu s do stanu p bez zmiany m_J , natomiast powrót jonu do stanu s może być dwojakiego rodzaju. Jon rtęci może nie zmienić liczby m_J , czemu towarzyszy emisja fotonu liniowo spolaryzowanego (tzw. polaryzacja π). W tym przypadku stan końcowy jonów jest taki sam, jak przed rozpraszaniem. Nie można więc określić, na którym jonie foton się rozproszył i powinniśmy obserwować typowy obraz interferencyjny. W drugim przypadku jon może zmienić magnetyczną liczbę kwantową o jeden, czemu towarzyszy emisja fotonu spolaryzowanego (tzw. polaryzacja σ). Tym razem stan jonu, na którym nastąpiło rozpraszanie ulega zmianie i w zasadzie można określić, którą drogą leciał foton. Interferencja powinna w takim razie zniknąć i to niezależnie od tego, czy faktycznie sprawdzamy, na którym jonie nastąpiło rozpraszanie. Licznik rejestrujący fotony i czuły na polaryzację światła może więc służyć jako urządzenie obserwujące raz falową, a raz korpuskularną naturę światła rozproszonego.