epsilon

11/93

(33)

Liczby doskonałe

Ludzie od dawien dawna przypisywali niektórym liczbom szczególne znaczenie. Wystarczy wymienić np: 3, 7, 13, 44... Matematycy także wyróżnili w zbiorze liczb naturalnych pewne rodziny liczb o szczególnych własnościach. Jedną z najlepiej znanych stanowią liczby pierwsze. Innymi znanymi i budzącymi zainteresowanie są liczby doskonałe.

Na czym polega ich doskonałość? Liczba jest doskonała, gdy daje się przedstawić jako suma swoich dzielników, różnych od niej samej. Najprostszym i pierwszym historycznie przykładem liczby doskonałej jest $6 = 1 + 2 + 3$. Starożytni Grecy, zarówno pitagorejczycy, jak i późniejsi mędrcy z Platonem na czele, przypisywali liczbie 6 szczególne znaczenie. Ale i znacznie wcześniej można znaleźć wzmianki wyróżniające szóstkę. W Piśmie Świętym napisano, że Bóg stworzył świat w sześć dni, dlatego też wiele wymiarów świątyni Salomona nawiązuje do liczby 6. W Biblii również przyjmowano, że 2π jest równe 6. A jakie są inne liczby doskonałe i ile ich jest? Żyjący na przełomie I i II wieku Nikomachos, autor *Arytmetyki*, uważał, że obiekty doskonałe i piękne zawsze są rzadkie. W związku z tym nie należy się spodziewać, że liczb doskonałych będzie dużo. I rzeczywiście, do czasów Euklidesa znana była jeszcze tylko jedna taka liczba 28 $(= 1 + 2 + 4 + 7 + 14)$. Euklides w *Elementach* umieścił nie tylko fakty geometryczne, lecz także zebrał twierdzenia z arytmetyki. Między innymi zauważył, że liczby postaci $2^{p-1}(2^p - 1)$, gdzie $2^p - 1$ jest liczbą pierwszą, są doskonałe. Dzięki temu mógł wskazać dwie nowe liczby tego typu: $496 = 2^{5-1}(2^5 - 1)$ oraz $8128 = 2^{7-1}(2^7 - 1)$. Kolejną, piątą liczbę doskonałą znaleziono dopiero w piętnastym wieku; była to $33550336 = 2^{12}(2^{13} - 1)$. Dwieście lat później Marin Mersenne wysunął przypuszczenie, że liczby $2^{p-1}(2^p - 1)$ powinny być doskonałe dla $p = 17, 19, 31, 67, 127$ i 257. Dlaczego właśnie takie, trudno dziś powiedzieć. O liczbach odpowiadających $p = 17$ i 19 pisał także Cataldi. Historycy matematyki uważają, że zarówno Cataldi, jak i Mersenne nie wiedzieli, czy $2^{17} - 1$ i $2^{19} - 1$ są pierwsze. Dopiero Leonhard Euler, nie tylko genialny matematyk, lecz także wspaniały rachmistrz, sprawdził, że $2^{17} - 1$, $2^{19} - 1$ i $2^{31} - 1$ są pierwsze wykazując tym samym, że odpowiednie liczby są doskonałe. Euler udowodnił ponadto, że każda liczba doskonała parzysta musi być postaci $2^{p-1}(2^p - 1)$. Oznacza to, że liczby pierwsze Mersenne'a, tj. liczby pierwsze postaci $2^m - 1$, wyznaczają wszystkie liczby doskonałe parzyste.

Szp.: - ...czy matematycy też mają jakieś „swoje" liczby? Które mają dla was specjalne właściwości?
J.M.: – Tak. Np. liczby pierwsze. Tzn. te, które nie dzielą się przez inne.
Szp.: – Są szczęśliwe czy pechowe?
J.M.: – Po prostu są ciekawsze. Tak jak liczby zaprzyjaźnione. Tzn. jedna liczba jest sumą dzielników drugiej liczby. I na odwrót. Albo liczba doskonała, która jest sumą swoich dzielników.
Szp.: – Rzeczywiście doskonale się dla takiej liczby składa... Tylko nie rozumiem dlaczego?
J.M.: – Wątpię, czy to zainteresuje czytelników „Szpilek"?
Szp.: – Ja też. A kto się tym naprawdę interesuje?
J.M.: – Najwięcej zajmowano się tym w starożytności. Szczególnie Pitagoras. Z tamtych czasów pochodzi np. przekonanie, że „Pan Bóg kocha liczby nieparzyste". Bo mają środek.
Szp.: – Aha! Nie rozumiem...
J.M.: – Np. 5 ma dwa i dwa, a w środku 1.
Szp.: – Szkoda!
J.M.: – Dlaczego?
Szp.: – Dlatego, że środek wypadł na koniec wywiadu. To się nie komponuje.
J.M.: – Co w takim razie pani proponuje?

(fragment wywiadu z profesorem Januszem Miką w numerze 1979 *Szpilek* (29.07.1979), zadedykowanym matematyce; rozmawiała C.M.)

Szczęśliwym rokiem dla liczb doskonałych był rok 1952, kiedy to po raz pierwszy zastosowano maszynę elektroniczną do poszukiwania liczb pierwszych Mersenne'a. Do tego czasu znano ich dwanaście; używając „mózgu elektronowego" w ciągu roku znaleziono pięć nowych (a więc również pięć nowych liczb doskonałych). Bez nowej techniki obliczeniowej odkrywanie kolejnych liczb doskonałych byłoby zadaniem beznadziejnym; sprawdzenie, że $2^{257} - 1$ nie jest pierwsza, zajęło Lehmerowi prawie rok, w 1952 roku maszyna potrzebowała na to 18 sekund. Do dziś odkryto 32 liczby pierwsze Mersenne'a, znane są więc 32 liczby doskonałe. W 1992 roku ogłoszono, że $2^{756839} - 1$ jest pierwsza; pobity został rekord z 1990 roku, kiedy to stwierdzono, że $391581 \cdot 2^{216193} - 1$ jest liczbą pierwszą.

A co z nieparzystymi liczbami doskonałymi? Mimo usilnych poszukiwań do dziś żadnej nie znaleziono. Równocześnie nikomu nie udało się udowodnić, że takie liczby nie istnieją. Jeśli są, to stanowią wyjątkowo rzadkie i duże okazy. Stwierdzono, że liczb doskonałych nieparzystych mniejszych od 10^{300} nie ma.

Problemy dotyczące liczb doskonałych budzą duże zainteresowanie, chociaż trudno określić ich znaczenie. Tu wszystko jest jeszcze możliwe. Niewykluczone, że ktoś udowodni, iż liczb doskonałych nieparzystych jest nieskończenie wiele, ale nikt nie będzie potrafił wskazać chociażby jednej.

Zdzisław POGODA

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Poźmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.